Metody numeryczne

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

October 21, 2020

1 Macierze.

1. Obliczyć normy l_1, l_2, l_∞ wektora $(2, 4, 7) \in \mathbb{R}^3$.
2. Narysować kule jednostkowe w $\mathbb{R}^2$ z normami l_1, l_2, l_∞.
3. Niech $x \in \mathbb{R}_n$. Pokazać, że:
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$
(Wyjaśnia to, skąd wzięło się oznaczenie l_∞).
4. Dla podanych macierzy obliczyć normy l_1, l_2, l_∞, l_E.
   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$
5. Uzasadnić, że dla normy macierzowej $\|A\|_\Delta = max|a_{ij}|$ nie zachodzi nierówność (warunek submultiplikatywności):
$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$
6. Odwrócić macierze z zadania 4. metodą Gaussa-Jordana.
7. Odwrócić macierze $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_5)$:
   (a)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
   (b)
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
8. Znaleźć wskaźnik uwarunkowania dla macierzy z zadania 4.
9. Dany jest układ $Ax = b$. Jeśli macierz A^{-1} jest zaburzona, co zmienia ją na macierz B, to zaburzenie przenosi się na rozwiązanie $x = A^{-1}b$, zamiast którego otrzymujemy wektor $\widetilde{x} = Bb$. Wyznaczyć bezwzględne i względne zaburzenie rozwiązania.

10. Rozwiązać układy równań metodą metodą eliminacji Gaussa:

    (a)

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + \ \ 8x_2 + 11x_3 = 21 \\ 3x_1 + 14x_2 + 25x_3 = 36 \end{cases}$$

    (b)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 50 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

    (c)

$$\begin{cases} -2x_1 + \quad x_2 + \ \ 4x_3 = 45 \\ -3x_1 + -1x_2 + \ \ 5x_3 = 36 \\ \ \ 2x_1 + \ \ 6x_2 + -3x_3 = 9 \end{cases}$$

11. Napisać algorytm rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$ metodą Gaussa.
12. Rozwiązać układy równań z zadania 10. metodą LU (rozkład wykonać metodą eliminacji Gaussa).

References

[1] D. Kincaid, *Analiza numeryczna.* WNT, 2005.

[2] G. Golub, C. Van Loan *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, 2013.