

3 Równania

1. Znajdź współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 9$$

z osią odciętych i osią rzędną układu współrzędnych. Narysuj wykres funkcji i zaznacz te punkty.

2. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x$ b) $\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{x + 1}} = -0.5$

c) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{6}{x+2} = \frac{x^2}{x^2-4}$ d) $\ln(x) + \log(x) = \pi$

3. Wyznacz kąt α należący do przedziału $\alpha \in [0, \pi/2]$ i będący rozwiązaniem równania

$$\sin(2\alpha) = \cos(\alpha)$$

Podaj wartość kąta α w stopniach.

4. Znajdź punkt przecięcia dwóch prostych:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 1 \\ y &= -x + 5 \end{aligned}$$

Sporządź wykresy linii.

5. Rozwiąż dwoma metodami układ równań (za pomocą funkcji `find` i macierzowo):

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ x - 5y &= -14 \end{aligned}$$

6. Rozwiąż dwoma metodami układ równań (za pomocą funkcji `find` i macierzowo):

$$\begin{aligned} 2a - 3b + 5c &= 11 \\ a + 4b - 7c &= -12 \\ 3a + 2b + 8c &= 31 \end{aligned}$$

7. Dla paraboli i prostej:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 5 \\ y &= x \end{aligned}$$

wyznacz punkt przecięcia leżący w III ćwiartce układu współrzędnych. Sporządź wykresy linii.

8. Znajdź punkt przecięcia okręgu i prostej:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

leżący w I ćwiartce układu współrzędnych. Sporządź wykresy linii.

9. Znajdź punkty przecięcia paraboli i prostej:

$$\begin{aligned} y^2 - 2y + x &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

10. Znajdź rozwiązania układów równań:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2x = 3 \\ x^2 - y^3 \cdot x = -26 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2}{y+1} = \frac{1}{x} \\ \frac{2}{x+y} = \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2\sqrt{xy} = 5 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{y^3} = 35 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ (x+2)^2 - (y+2)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 1875 \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 625 \end{cases}$$

11. Rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = -\frac{9}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} - \frac{2}{z} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 31 \\ y + z + t = 39 \\ z + t + x = 35 \\ x + y + t = 33 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} xz = 4 \\ 7y - zy = 9 \\ xu = 2 \\ (8 - u) \cdot y = 18 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} xy = 10 \\ yz = 20 \\ zt = 30 \\ x + y + z + t = 20 \end{cases}$$

12. (*) Wykreśl wykresy elipsy o równaniu: $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4$ dla x z zakresu od $-\sqrt{5}/2$ do $\sqrt{5}/2$ i prostej o równaniu $x = 1$ dla $y \in [-2, 2]$. Znajdź współrzędne punktów przecięcia prostej z elipsą. (Aby zrobić wykres można symbolicznie rozwiązać równanie elipsy względem y .)

4 Przekształcenia symboliczne

1. Rozwiąż symbolicznie równania i układy równań (polecenie `solve`):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 8x^2 + 4 = 7x + 9 \\ \text{b)} & x^3 - 9x^2 + 9x + 10 = 0 \\ \text{c)} & \sqrt{x+a} = a - \sqrt{x} \\ \text{d)} & \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b} \\ \text{e)} & \begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ x - 4y = -5 \end{cases} \\ \text{f)} & \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \end{array}$$

2. Znajdź rozwiązanie równania kwadratowego dla dowolnych wartości współczynników a , b i c :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

3. Przedstaw w postaci iloczynu liczb pierwszych (polecenie `factor`) a) liczbę 18018, b) liczbę 30!, liczbę 1234567890. Oblicz dokładną wartość 30!

4. Rozłóż na czynniki wyrażenia (polecenie `factor`):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x^4 - x^3 - x + 1 \\ \text{b)} & x^4 - 11x^3 + 29x^2 + 35x - 150 \\ \text{c)} & x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 \\ \text{d)} & x^4 - 4x^2 + 4x - 1 \\ \text{e)} & p^3 - q^3 - 2pq(p - q) \\ \text{f)} & a^5 - b^5 \end{array}$$

5. Uprość wyrażenia (polecenie `simplify`):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 4\sqrt{18} - 13\sqrt{8} + 6\sqrt{50} \\ \text{b)} & \frac{(\sqrt{21} - 1)\sqrt{11 + \sqrt{21}}}{2\sqrt{2}} \\ \text{c)} & \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \\ \text{d)} & \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} + 2x - 5 \\ \text{e)} & \frac{2 \cdot (n^2 + 4n + 4 + n^2 - 4)}{(n + 2)^2 - (n^2 - 4)} \\ \text{f)} & \ln\left(\frac{e^x - e^{x-2}}{e^{x-3}}\right) \\ \text{g)} & \frac{x^4 - (x - 3)^2}{x^2 + x - 3} \\ \text{h)} & \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} \\ \text{i)} & (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(1 - a) \\ \text{j)} & (a^{m+1} + a^m + a^{m-1})(a^{m+1} - a^m) \\ \text{k)} & \frac{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}} \\ \text{l)} & (\sin(x) + \cos(x))^2 \end{array}$$

6. Wykonaj potęgowanie (polecenie `expand`):

$$\text{a)} \quad (a + b)^4 \qquad \text{b)} \quad (x + y)^6 - (x^2 + y^2)^3 + (x^3 - y^3)^2$$

7. Sprowadź do wspólnego mianownika ułamki (polecenie `factor`):

$$\text{a)} \quad \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y} \qquad \text{b)} \quad \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}$$

8. Uporządkuj wyrażenie (polecenie `collect`):

a) względem x : $(x + y) \cdot [(x + y)^2 - 3xy] + (xy)^3$

b) najpierw względem a a potem względem b : $(a + b + 1)^2 + (a + b - 1)^2$

9. Podstaw $x = \frac{3}{2}$ i $y = \frac{1}{2}$ i oblicz wartość wyrażenia (polecenie `substitute`):

$$\frac{(x + y)^{10} - (x - y)^{10}}{4xy}$$

10. W równaniu:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = \frac{2}{3}$$

podstaw: $y = \frac{1 - x}{1 + x}$, a następnie znajdź rozwiązanie równania.

11. Rozwiąż nierówności (polecenie `solve`):

a) $x^2 - 2x - 3 < 0$ b) $|2 - x| > 1$

c) $|x + 2| + |x - 5| \geq 1$ d) $\frac{2x + 1}{x + 2} > 1$

12. Rozłóż na ułamki proste wyrażenia (polecenie `parfrac`):

a) $\frac{2x + 2}{x^2 + 2x}$ b) $\frac{x}{x^3 + 1}$

c) $\frac{4x^2}{x^4 - 1}$ d) $\frac{x^3 - 2}{x^4 - 3x^2 - 4}$

e) $\frac{x^6 - x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ f) $\frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}$

13. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin(x)}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x + 7}{x^2 + x + 12}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} - \operatorname{tg}(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{x}}$

14. Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji:

a) $y = \frac{2x}{1 - x^2}$ b) $y = \sin(x^2 + 5x + 1)$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$ d) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

15. Oblicz całki:

a) $\int \frac{5}{\sqrt{2x + 3}} dx$ b) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \cos^2(x) dx$ d) $\int \frac{x}{x^2 - 7x + 13} dx$

e) $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ f) $\int_0^\pi \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx$

g) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 4} dx$ h) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^3 + x + 1} dx$

16. Dana jest funkcja:

$$f(x) = 5abx - 3a^2x^3$$

Oblicz pochodną i całkę nieoznaczoną tej funkcji.