Podstawy sztucznej inteligencji

wykład 2

Strategie przeszukiwania - ślepe i heurystyczne

Joanna Kołodziejczyk

27 październik 2011

Plan wykładu

Jak wykonać przeszukiwanie

- Przeszukiwanie przestrzeni stanów wymaga znalezienia ścieżki od stanu początkowego do końcowego.
- Aby tego dokonać buduje się graf/drzewo rozpoczynający się od stanu początkowego (czasami stanu końcowego).
- Węzeł jest **rozwijany** przez zastosowanie operatorów tak, by wygenerować wszystkich potomków stanu(węzła) bieżącego.
- Potomkowie znajdują się o poziom niżej w drzewie niż węzeł rozwijany.
- Strategia przeszukiwania decyduje, który węzeł jest rozwijany w kolejnym kroku.
- Różne strategie dają różne wyniki.

Cel główny

Znaleźć rozwiązanie najmniejszym nakładem obliczeniowym jednocześnie przechowując w pamięci jak najmniej węzłów.

Strategie bez informacji

Nazywane również ślepymi, gdyż rozwijając węzły sprawdzają tylko czy węzeł jest rozwiązaniem (oczekiwanym stanem końcowym). Kończą działanie, gdy trafią na stan końcowy.

Do takich strategii między innymi należą:

- BFS — szukanie wszerz
- DFS — szukanie w głąb
- IDS — iteracyjnie w głąb

Stosowane kryteria oceny algorytmów

Zupełność

Czy strategia zawsze znajdzie rozwiązanie, jeżeli ono istnieje?

Złożoność czasowa

Jaka liczba węzłów jest generowana/rozwijana?

Obszar zajmowanej pamięci

Jaka jest maksymalna liczba węzłów w pamięci?

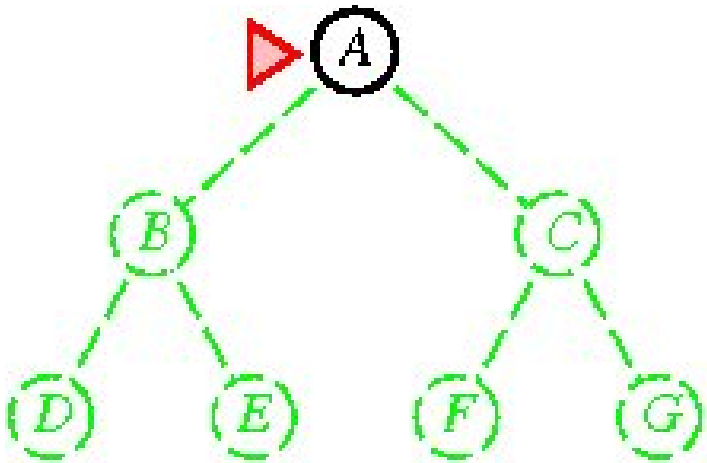
Optymalność

Czy zawsze znajdzie najmniej kosztowne rozwiązanie?

BFS — szukanie wszerz

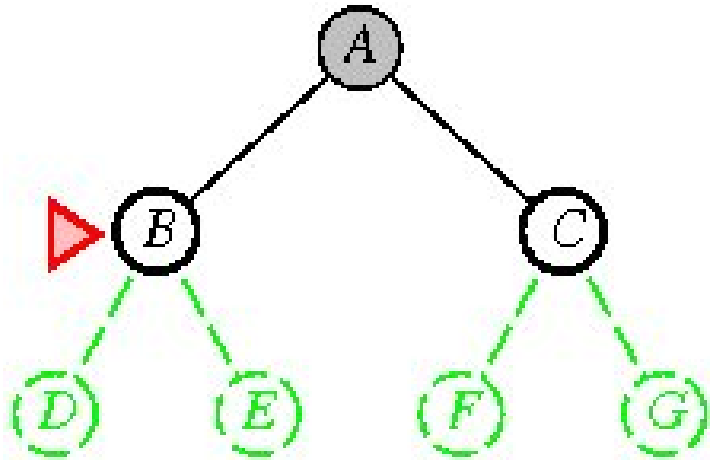
- Pierwszy rozwijany jest węzeł w korzeniu drzewa/grafu (stan początkowy).
- Następnie rozwija wszystkich potomków stanu początkowego, a potem ich potomków itd.
- Czyli BFS rozwija wszystkie węzły drzewa/grafu na poziomie d.
- BFS może być zaimplementowany jako kolejka FIFO tj. nowy węzeł potomny z rozwinięcia węzła bieżącego jest dopisywany na końcu kolejki węzłów czekających do rozwinięcia (LISTA OPEN).

BFS — szukanie wszerz



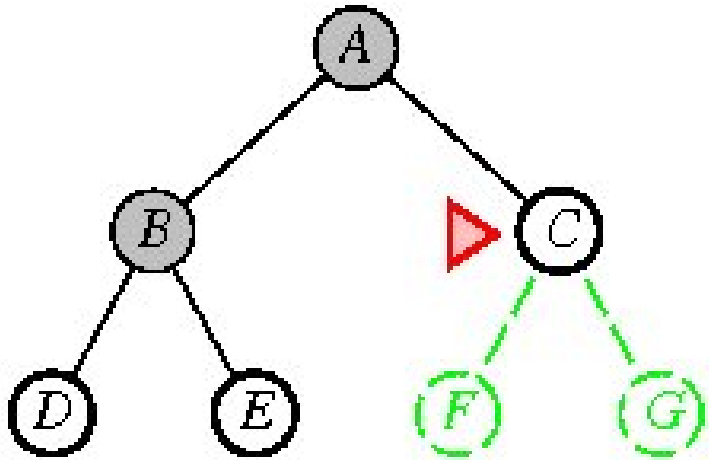
$$LISTA\_OPEN = \{A\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{\}$$

BFS — szukanie wszerz



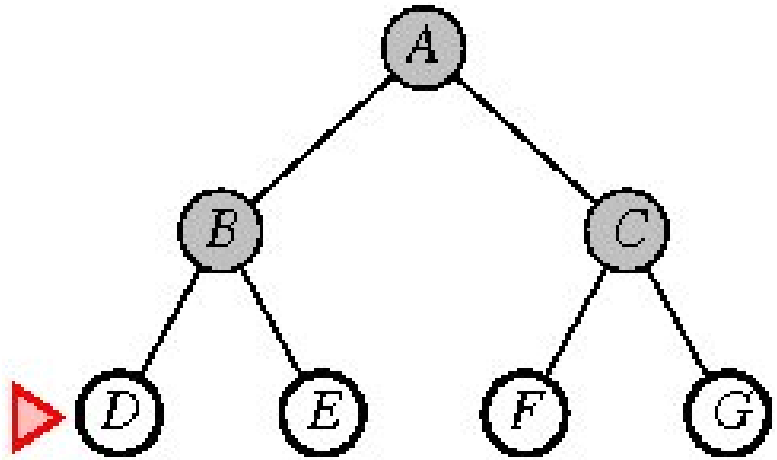
$$LISTA\_OPEN = \{B, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A\}$$

BFS — szukanie wszerz



$$LISTA\_OPEN = \{C, D, E\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B\}$$

BFS — szukanie wszerz



$$LISTA\_OPEN = \{D, E, F, G\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, C\}$$

Ocena algorytmu BFS

Zupełność

Tak, jeżeli b (liczba węzłów potomnych) jest skończone.

Złożoność czasowa

Zakłada się, że węzeł w korzeniu może mieć b potomków. Każdy jego potomek też może mieć b potomków. Rozwiązanie jest na poziomie drzewa d. W najgorszym przypadku trzeba rozwinąć wszystkie węzły z poziomu d oprócz ostatniego węzła. Co daje:

$$1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^d + (b^{d+1} - b) = O(b^{d+1})$$

Ocena algorytmu BFS

Obszar zajmowanej pamięci

$O(b^{d+1})$, bo przechowuje każdy węzeł w pamięci (albo węzły są liśćmi (LISTA OPEN) i czekają na rozwinięcie, lub są już rozwinięte i przechowuje się je w pamięci, by wielokrotnie nie sprawdzać stanów już odwiedzonych (LISTA CLOSED)).

Optymalność

Tak, jeżeli w każdym kroku koszt ścieżki jest stały.

Wnioski

1. Wymagania pamięciowe algorytmu są trudniejsze do spełnienia niż czasowe.
2. Problemy, gdzie rozwiązanie jest na dużej głębokości i liczba potomków jest duża nie są rozwiązywalne strategią BFS.

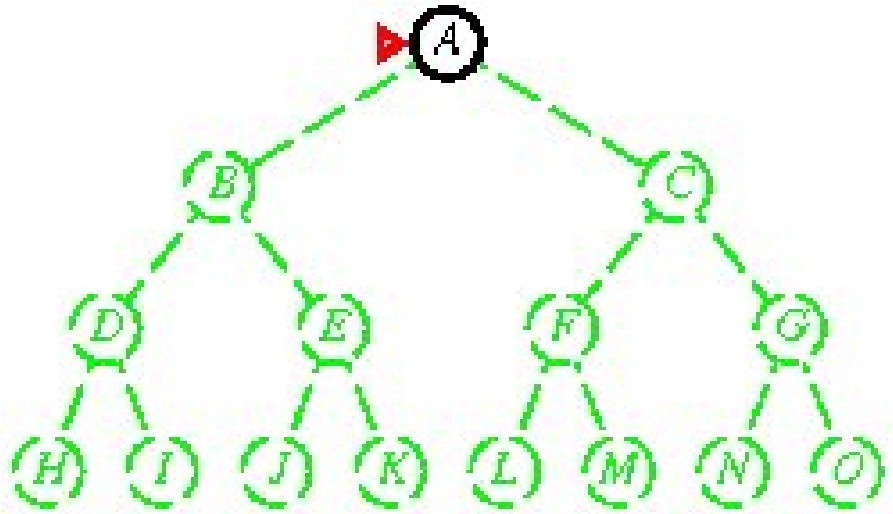
Głębokość	Węzły	Czas	Pamięć
2	1100	0.11 seconds	1 MB
4	111100	11 seconds	106 MB
6	10^7	19 minutes	10 gigabytes
8	10^9	31 hours	1 terabyte
10	10^{11}	129 days	101 terabytes
12	10^{13}	35 years	10 petabytes
14	10^{15}	3523 years	1 exabyte

Wymagania czasowe i pamięciowe dla BFS. Założono, że $b = 10$, 10000 *węzłów/sek*, 1000 *bytów/węzeł.*

DFS — szukanie w głąb

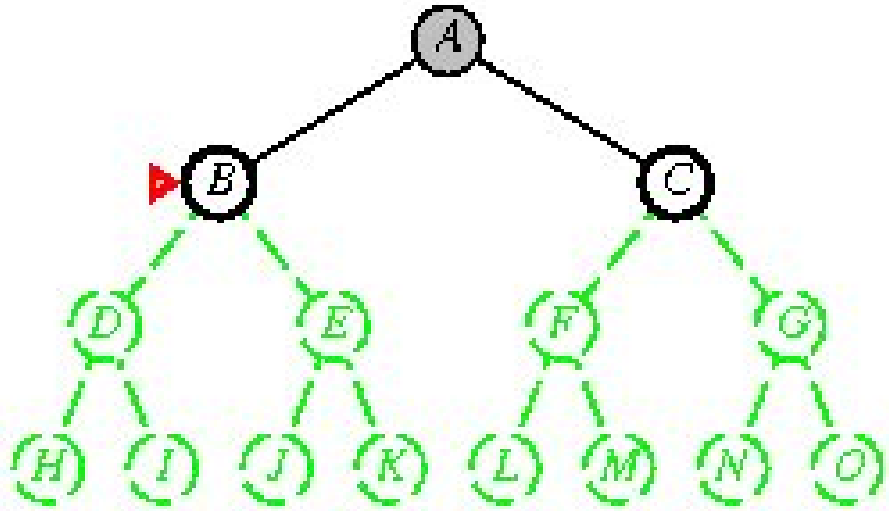
- Zaczyna od korzenia czyli stanu początkowego.
- Rozwija jedną gałąź aż do osiągnięcia maksymalnej głębokości w drzewie/grafie (m).
- Jeżeli liść nie jest rozwiązaniem, to wraca do najbliższego, płytszego, jeszcze nie rozwiniętego węzła i rozwija go.
- Implementacją tej strategii może być kolejka LIFO (stos). tj. nowy węzeł potomny z rozwinięcia węzła bieżącego jest dopisywany na początku kolejki węzłów czekających do rozwinięcia (LISTA OPEN).

DFS — szukanie w głąb



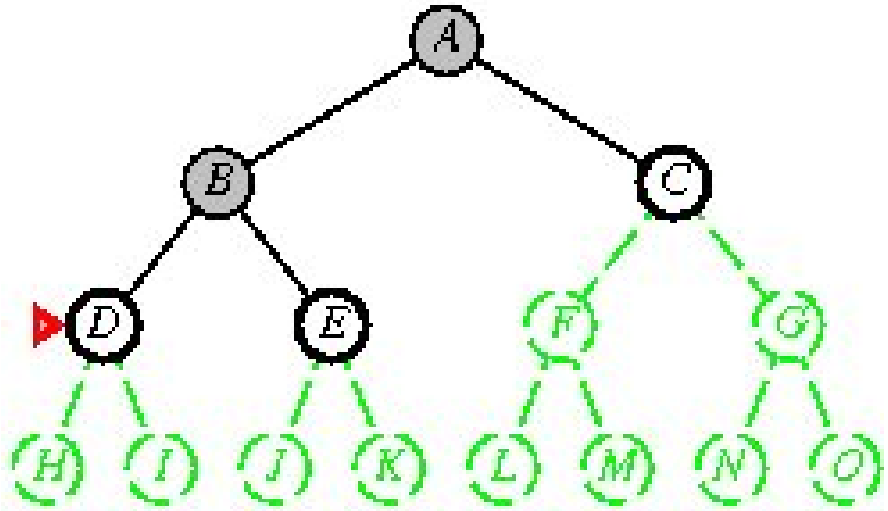
$$LISTA\_OPEN = \{A\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{\}$$

DFS — szukanie w głąb



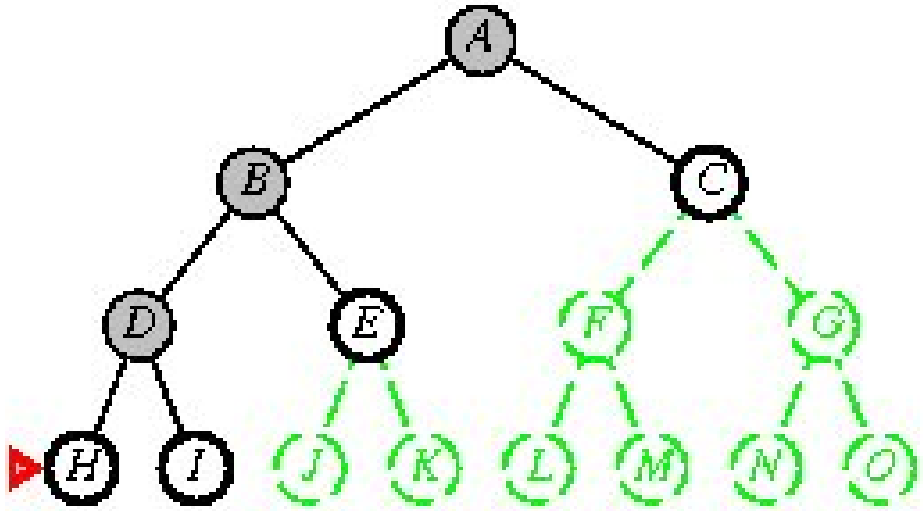
$$LISTA\_OPEN = \{B, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A\}$$

DFS — szukanie w głąb



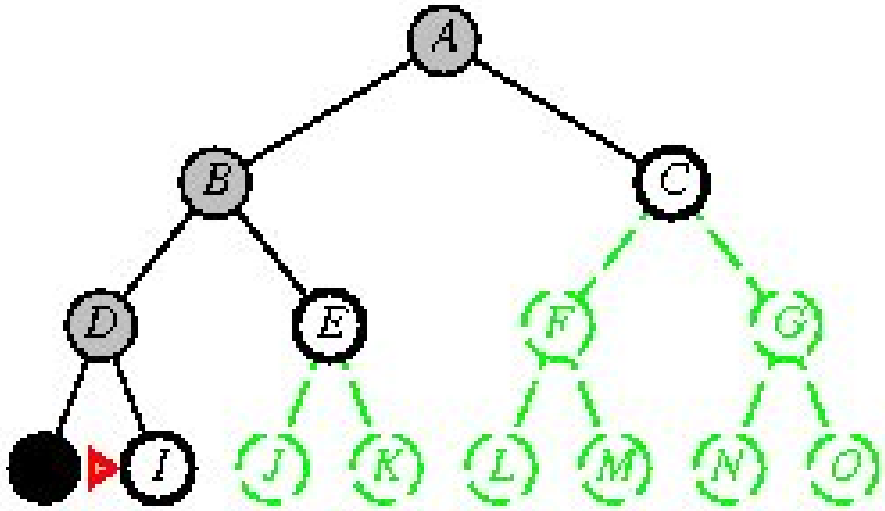
$$LISTA\_OPEN = \{D, E, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B\}$$

DFS — szukanie w głąb



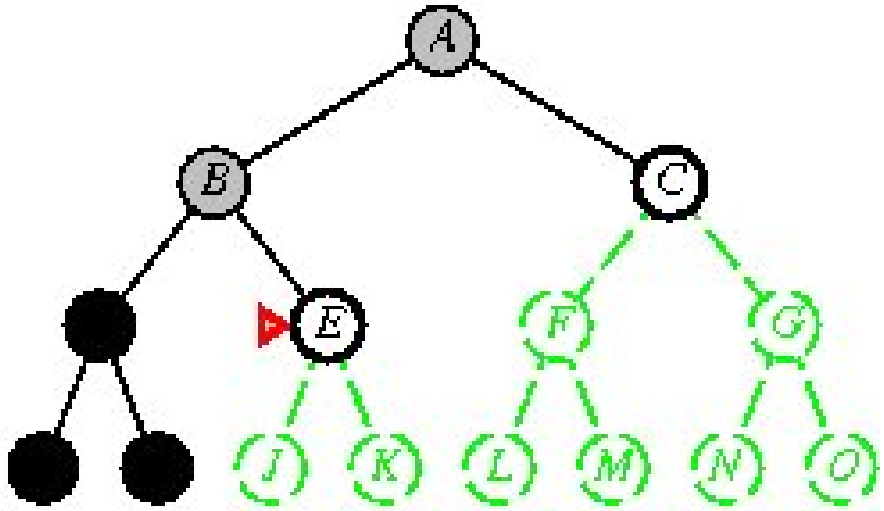
$$LISTA\_OPEN = \{H, I, E, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D\}$$

DFS — szukanie w głąb



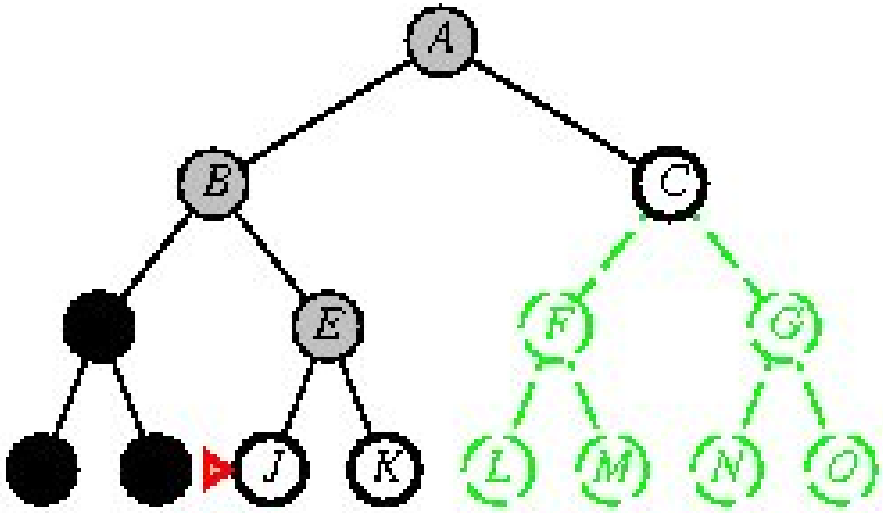
$$LISTA\_OPEN = \{I, E, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H\}$$

DFS — szukanie w głąb



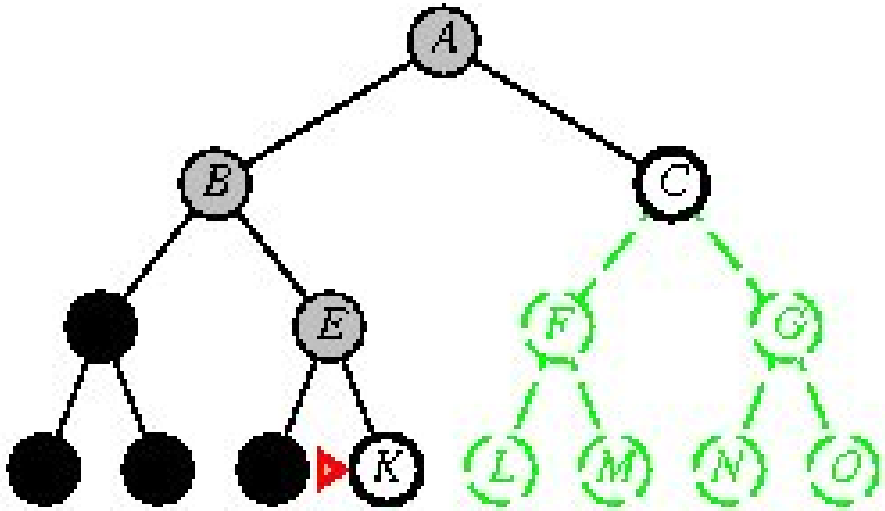
$$LISTA\_OPEN = \{E, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I\}$$

DFS — szukanie w głąb



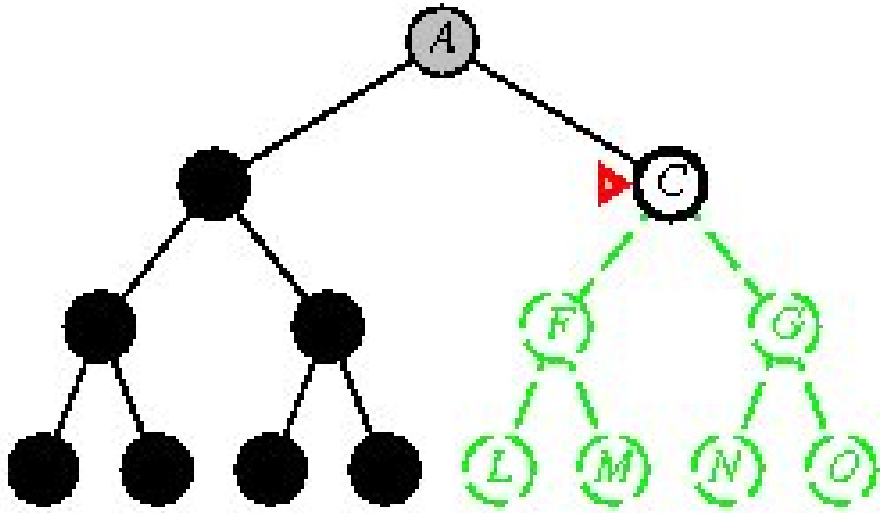
$$LISTA\_OPEN = \{J, K, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I, E\}$$

DFS — szukanie w głąb



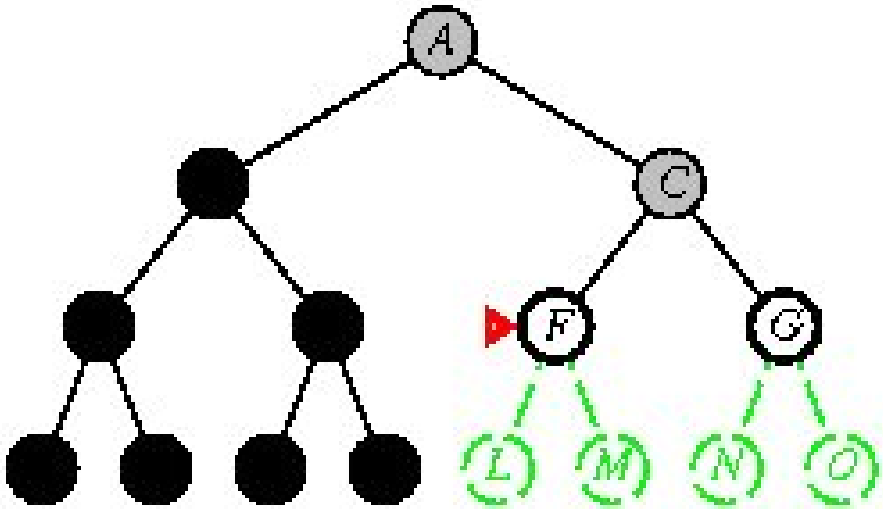
$$LISTA\_OPEN = \{K, C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I, E, J\}$$

DFS — szukanie w głąb



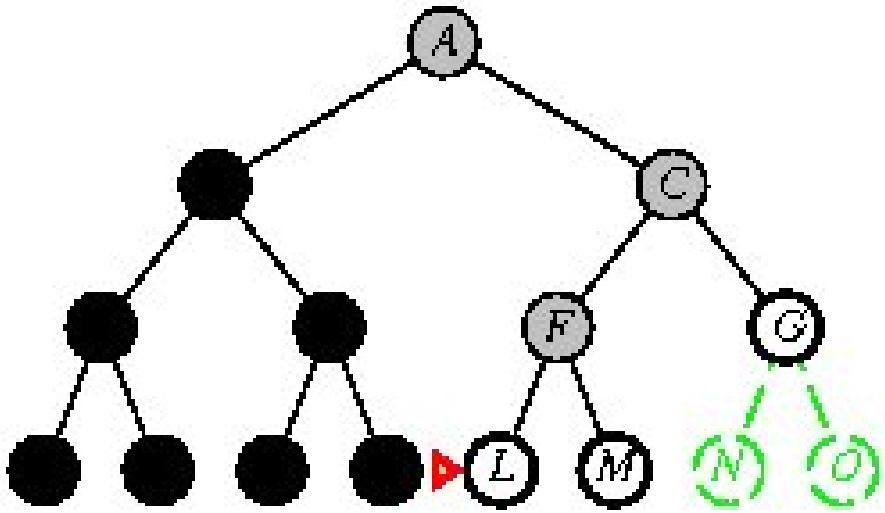
$$LISTA\_OPEN = \{C\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I, E, J, K\}$$

DFS — szukanie w głąb



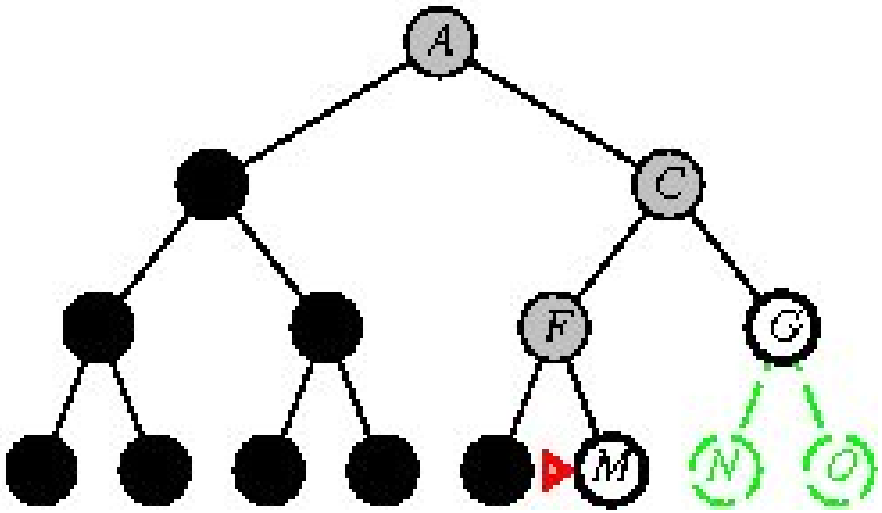
$$LISTA\_OPEN = \{F, G\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I, E, J, K, C\}$$

DFS — szukanie w głąb



$$LISTA\_OPEN = \{L, M, G\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I, E, J, K, C, F\}$$

DFS — szukanie w głąb



$$LISTA\_OPEN = \{M, G\}$$
$$LISTA\_CLOSED = \{A, B, D, H, I, E, J, K, C, F, L\}$$

Ocena algorytmu DFS

Zupełność

Tak, jeżeli stosowana jest LISTA CLOSED (graf).
Nie, jeżeli nie pamięta się już odwiedzonych węzłów (drzewo).

Złożoność czasowa

$O(b^m)$: gdy m — maksymalna głębokość drzewa. Złożoność wzrasta, gdy m jest dużo większe od d. W praktyce bardzo często istnieje w drzewie wiele rozwiązań, zatem DFS znajdzie nieoptymalne i ciągle może być szybszy niż BFS.

Ocena algorytmu DFS

Obszar zajmowanej pamięci

Przechowuje pojedynczą ścieżkę w pamięci od korzenia do liścia i braci tych węzłów na każdym poziomie (LISTA OPEN).
Zatem ma niewielkie wymagania pamięci - złożoność liniowa: $O(bm)$.

Optymalność

Nie, gdyż może znaleźć rozwiązanie na poziomie większym niż d, jeżeli jest ono w gałęzi przeszukiwanej wcześniej.

IDS — iteracyjnie w głąb

Iterative deepening depth-first search jest modyfikacją DFS gdzie ogranicza się głębokość przeszukiwania. Dzięki temu łączy w sobie zalety DFS i BFS.

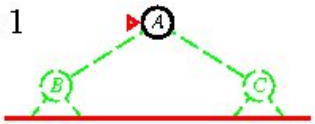
- Algorytm poszukuje najlepszej wartości ograniczenia poziomu przeszukiwań (zmienna *limit*).
- Jest to realizowane przez stopniowe zwiększanie *limit* od 0 do d co 1, dopóki nie znajdzie rozwiązania.
- Rozwiązanie zostanie znalezione na poziomie d (najbliższe rozwiązanie).
- Algorytm jest zupełny i optymalny, gdy koszt ścieżki jest niemalejącą funkcją głębokości drzewa.
- Sprawdza się w zadaniach, w których nie jest znany poziom rozwiązania.

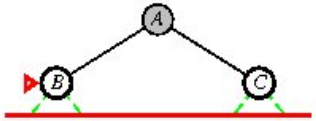
IDS — przykład

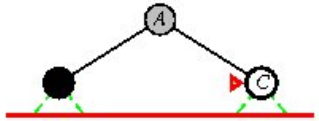
Limit = 0

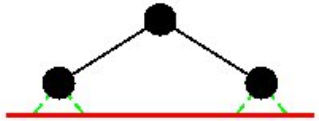
IDS — przykład

Limit = 1

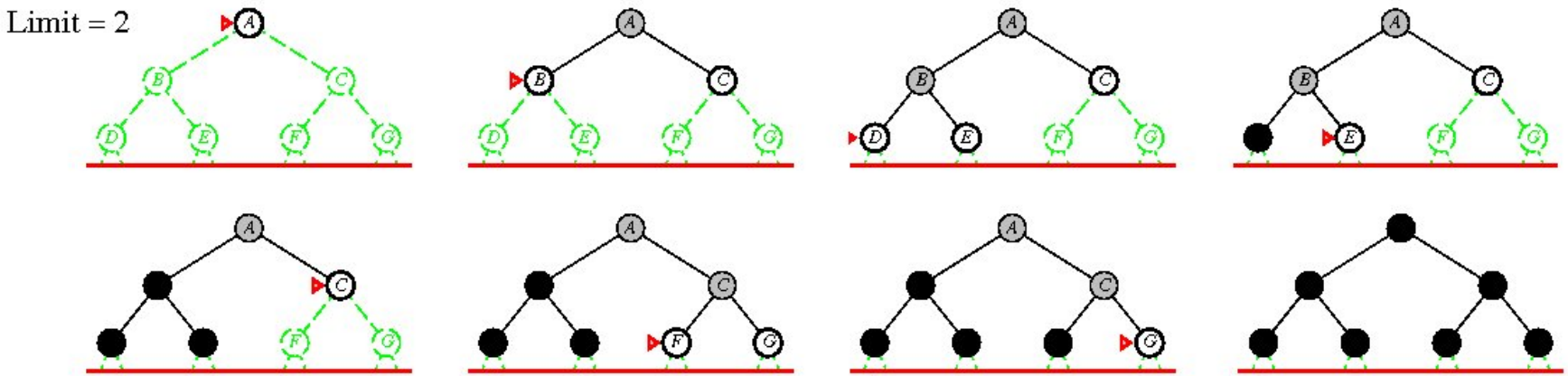




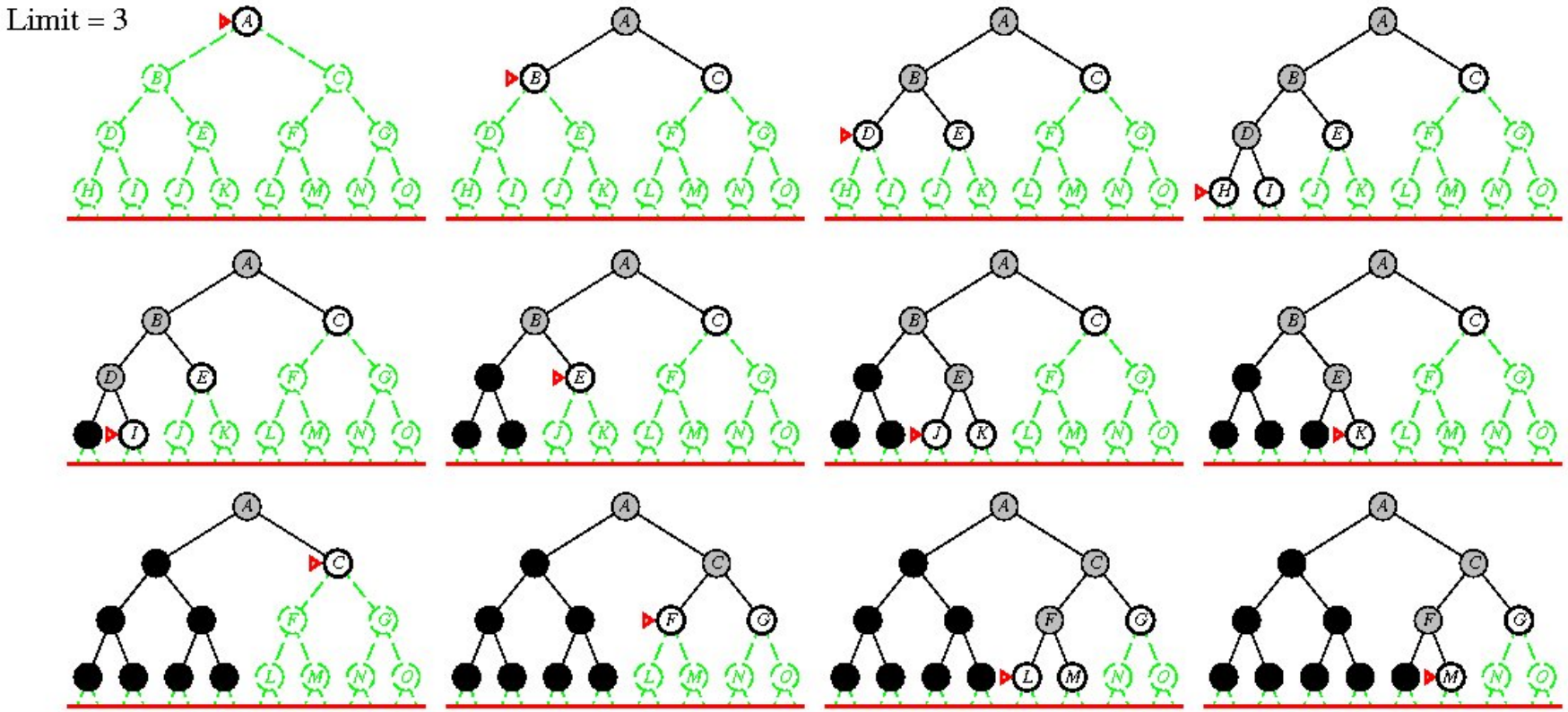




IDS — przykład



IDS — przykład



Ocena algorytmu IDS

Zupełność

Tak, zawsze znajdzie istniejące rozwiązanie.

Złożoność czasowa

Algorytm wydaje się być kosztowny ze względu na wielokrotne powtarzanie szukania na niektórych poziomach.
Acz... Węzły na poziomie d będą przeszukiwane 1 raz, na poziomie $d-1$ dwa razy itd. aż do korzenia, który będzie rozwinięty $d+1$ razy. Stąd całkowita liczba węzłów to:
$N(IDS) = (d+1)1 + db + (d-1)b^2 + \cdots + 3b^{d-2} + 2b^{d-1} + b^d$
dla BFS to: $N(BFS) = b + b^2 + \cdots + b^d + (b^{d+1} - b)$
Porównanie: $b = 10$ i $d = 5$:
$N(IDS) = 6 + 50 + 400 + 3,000 + 20,000 + 100,000 = 123,456$,
gdy $N(BFS) = 10 + 100 + 1,000 + 10,000 + 100,000 + 999,990 = 1,111,100$

Ocena algorytmu IDS

Obszar zajmowanej pamięci

Przechowuje w pamięci pojedynczą ścieżkę od korzenia do liścia i wszystkich braci.
Złożoność algorytmu DFS: $O(bm)$

Optymalność

Tak, jeżeli koszt ścieżki jest stały lub jest niemalejącą funkcją głębokości w drzewie.

Strategie z informacją — informed search

Strategie heurystyczne

Wykorzystują dodatkową informację, specyficzną wiedzę o rozwiązywanym problemie, co pozwala na zwiększenie wydajności algorytmów przeszukiwania w stosunku do metod ślepych.

Eksplozja kombinatoryczna

To gwałtowny wzrost obliczeń przy niewielkim wzroście rozmiaru danych wejściowych (cecha zadań z klasy NP-trudnych).

Przykład eksplozji kombinatorycznej

Traveling Salesman Person (problem komiwojażera)

Założenia:

- dana jest mapa
- dane są dystanse pomiędzy parami miast
- każde miasto odwiedzane jest tylko raz
- cel: znaleźć najkrótsza drogę, jeżeli podróż zaczyna się i kończy w jednym z wybranych miast.

Dla N miast istnieje $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (N-1)$ możliwych kombinacji (tras komiwojażera). Czas jest proporcjonalny do N, a całkowity do $N!$, zatem
dla 10 miast jest $10! = \mathbf{3\ 628\ 800}$ tras
a dla 11 miast aż **39 916 800** tras.

Best-First search

Best-first search (najpierw najlepszy) wykorzystuje funkcję oceny ($f(n)$).

- Dla węzła n funkcja $f(n)$ oszacowuje jego „użyteczność".
- Funkcja oceny mierzy odległość do rozwiązania.
- Rozwija się najbardziej użyteczne węzły (takie, które wydają się być najlepsze w bieżącej chwili wg $f(n)$).
- Implementacja strategii to lista węzłów posortowanych według malejącej wartości $f(n)$ (przy założeniu, że $f(goal) = 0$, a $f(n) > 0$).

Warianty best-first search:

- *Szukanie zachłanne* (greedy best-first search)
- A^*

Funkcja heurystyczna

Funkcja odwzorowująca stany we współczynnik ich użyteczności.

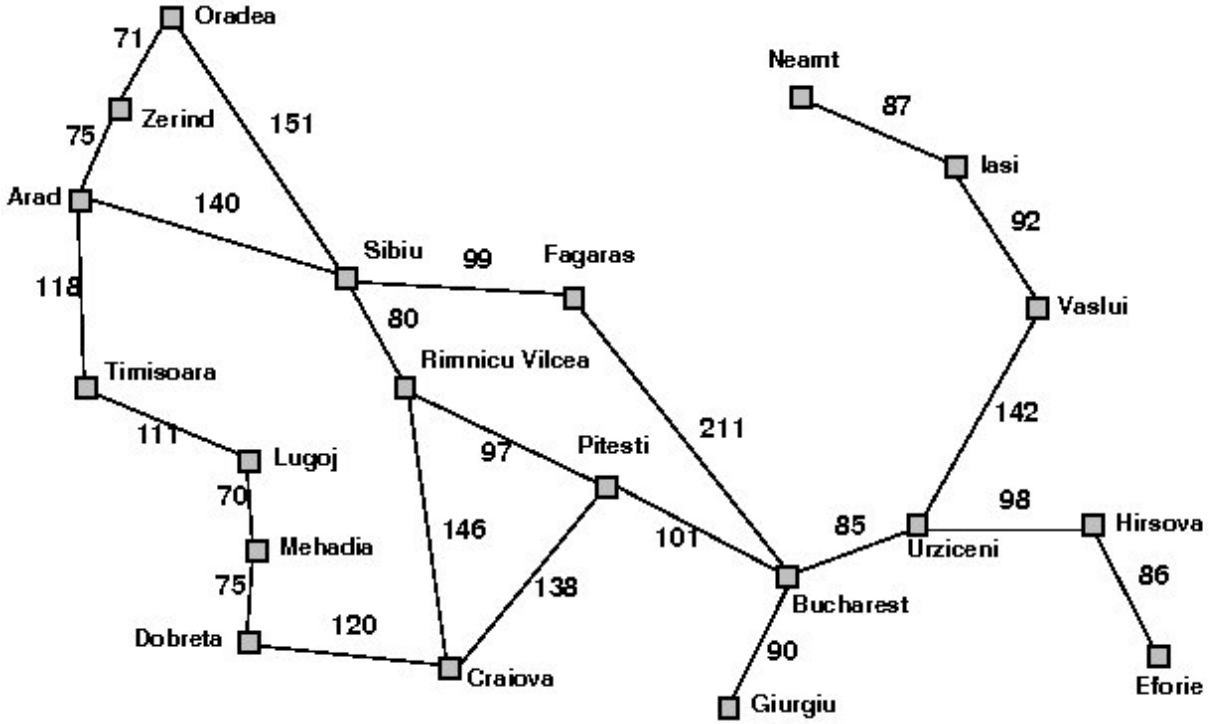
- Najczęściej jej przeciwdziedzina to $\mathcal{R}^+$.
- Zazwyczaj określa „odległość" od rozwiązania.
- Przyjmuje się, że $h(n) = 0$, gdy $n = cel$ (rozwiązanie).

$$h : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

gdzie Ω przestrzeń stanów, a $\mathcal{R}$ zbiór liczb rzeczywistych.

$h(n)$ — jest oszacowaniem! kosztu przejścia od węzła n do rozwiązania.

Przykład — podróż po Rumunii (założenia)



Straight–line distance to Bucharest	
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

h_{SLD} — straight-line distance heuristic. Odległość pomiędzy dwoma miastami wyznaczona jako długość odcinka pomiędzy nimi.

- $h_{SLD}(Arad) = 366$
- h_{SLD} nie jest bezpośrednią daną wejściową problemu.

Przeszukiwanie zachłanne

Greedy best-first search

Rozwija węzły, które są najbliższe rozwiązania wg $f(n)$, zakładając, że prawdopodobnie prowadzi to do najszybszego rozwiązania.

Oszacowuje koszt węzła stosując tylko funkcję heurystyczną

$$f(n) = h(n)$$

Minimalizowanie $h(n)$ jest podatne na niewłaściwy punkt startowy (prowadzi do suboptymalnego rozwiązania).

Greedy best-first search przypomina DFS, bo wybiera w pewnym sensie jedną ścieżkę.

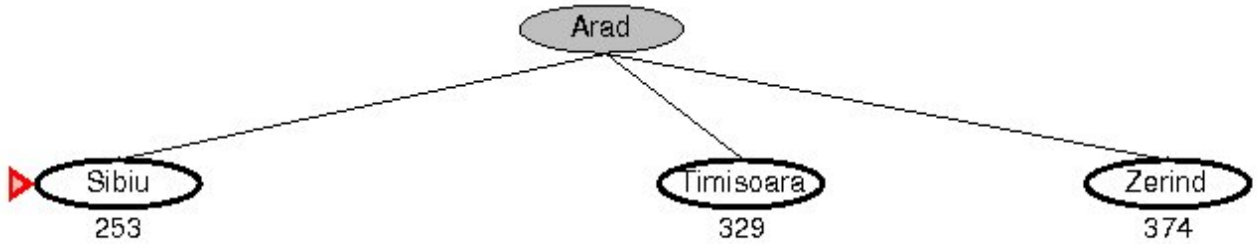
Przeszukiwanie zachłanne — przykład

Zakłada się, że za pomocą greedy best first search szukamy najkrótszej drogi z Aradu do Bukaresztu.

Stan początkowy: Arad

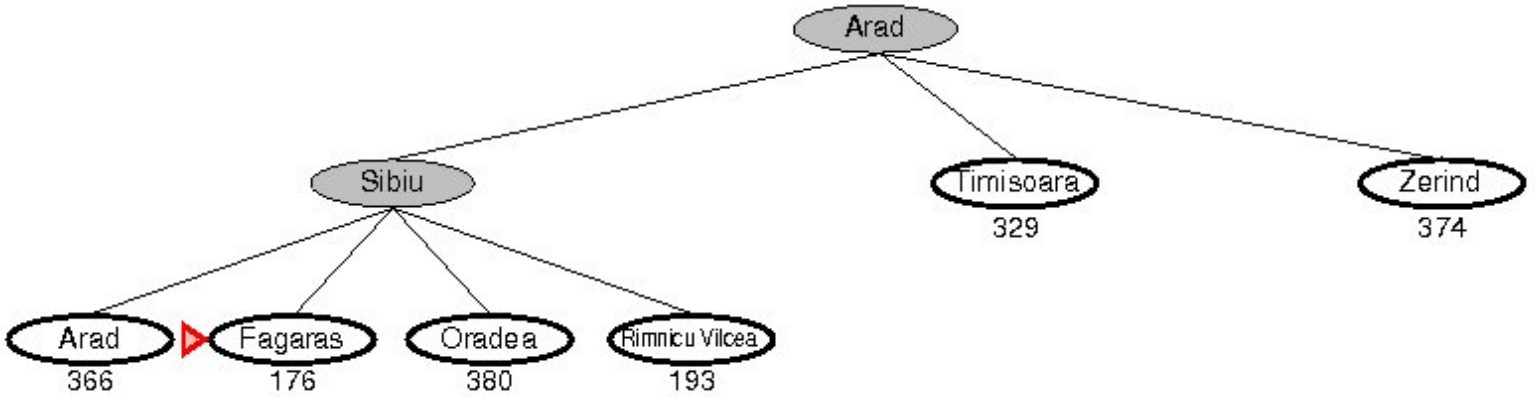
$LISTA\_OPEN = \{Arad.h(Arad) = 366\}$

Przeszukiwanie zachłanne — przykład



Pierwszy krok rozwija węzeł Arad i generuje potomków: Sibiu, Timisoara and Zerind
$LISTA\_OPEN = \{Sibiu.h(Sibiu) = 253, Timisoara.h(Timisoara) = 329, Zerind.h(Zerind) = 374\}$
Greedy best-first wybierze Sibiu.

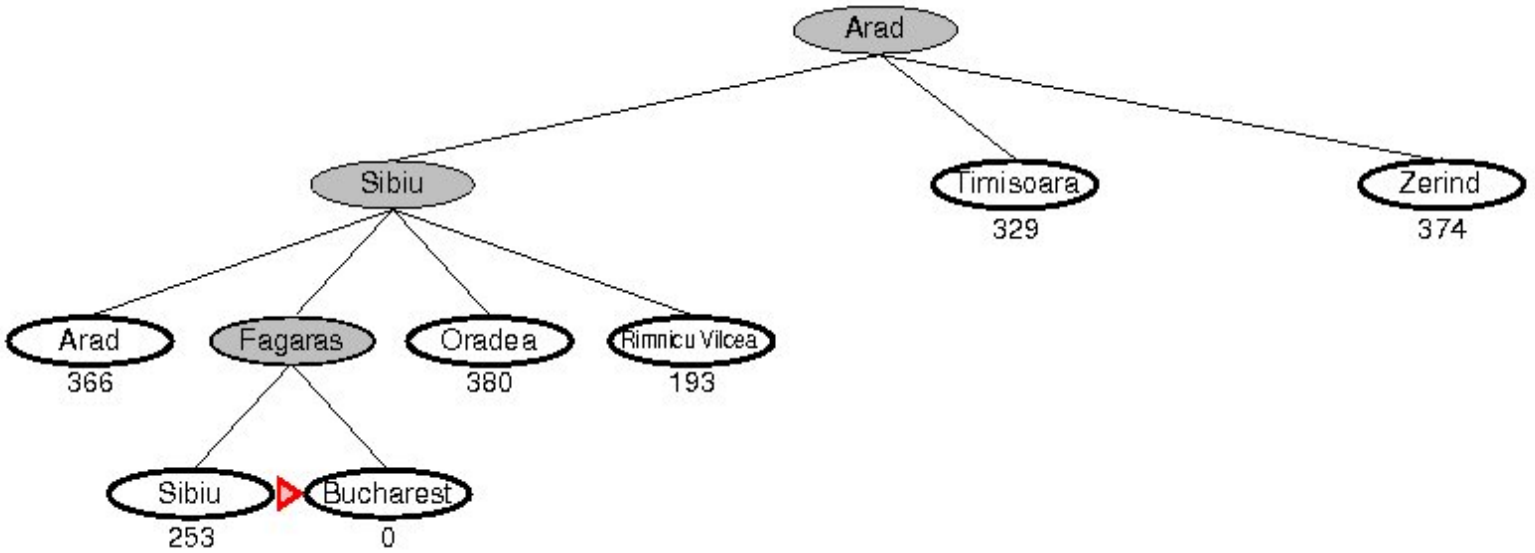
Przeszukiwanie zachłanne — przykład



Po rozwinięciu Sibiu otrzymamy :
$LISTA\_OPEN = \{Fagaras.h(Fagaras) = 176, RimnicuVilcea.h(RimnicuVilcea) = 193, Timisoara.h(Timisoara) = 329, Arad.h(Arad) = 366, Zerind.h(Zerind) = 374, Oradea.h(Oradea) = 380\}$

Greedy best-first wybierze Fagaras.

Przeszukiwanie zachłanne — przykład



Jeżeli Fagaras jest rozwinięte to otrzymamy: Sibiu i Bukareszt.
Cel został osiągnięty $h(Bukareszt) = 0$, acz nie jest optymalny:
(zobacz Arad, Sibiu, Rimnicu Vilcea, Pitesti)

Ocena algorytmu Greedy Best First Search

Zupełność

Tak, jeżeli nie ma pętli nieskończonych, co można zapewnić zastosowaniem LISTY CLOSED i dobrej heurystyki.

Złożoność czasowa

$O(b^m)$ — choć dobra heurystyka może dać znaczne zmniejszenie złożoności czasowej.

Obszar zajmowanej pamięci

Przechowuje w pamięci wszystkie węzły.
Złożoność algorytmu: $O(b^m)$

Optymalność

Nie.

A*

Główne cechy algorytmu:

Funkcja oceny dla A*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

gdzie:

- $g(n)$ = koszt osiągnięcia bieżącego węzła n z węzła początkowego
- $h(n)$ = oszacowany koszt przejścia z węzła n do rozwiązania
- $f(n)$ = oszacowany pełny koszt ścieżki przez węzeł n do rozwiązania

A*

Algorytm A^* ma szansę być zupełny i optymalny jeżeli $h(n)$ spełni pewne warunki.

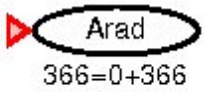
Twierdzenie

Algorytm A^* jest optymalny, jeżeli funkcja heurystyczna jest dopuszczalna (admissible), tj. taka że:

- Nigdy nie przeceni kosztu dotarcia do rozwiązania: $h(n) \leq h^*(n)$, gdzie $h^*(n)$ jest rzeczywistym kosztem osiągnięcia rozwiązania z n. Innymi słowy jest z natury optymistyczna, gdyż zakłada, że koszt rozwiązania jest mniejszy od rzeczywistego.
- $h(n) \geq 0$, stąd $h(G) = 0$ dla każdego rozwiązania G.

Przykład: $h_{\mathrm{SLD}}(n)$ - nigdy nie może być większa od rzeczywistego dystansu.

A* : przykład

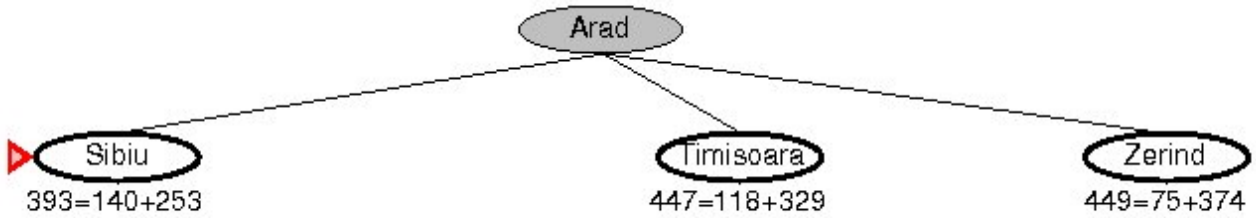


Szukamy najkrótszej drogi z Aradu do Bukaresztu.

Stan początkowy: Arad

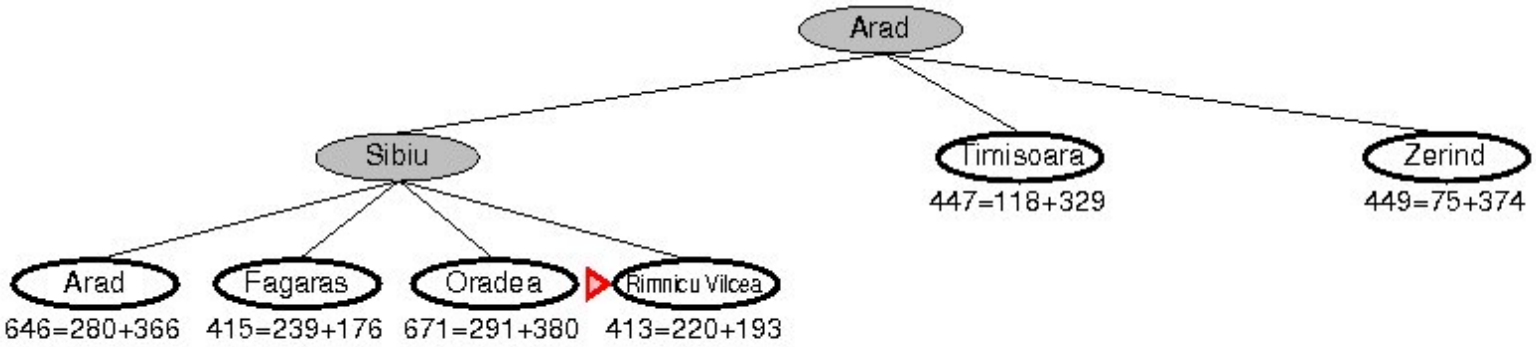
$f(Arad) = g(Arad) + h(Arad) = 0 + 366 = 366$

A* : przykład



Pierwszy krok rozwija węzeł Arad i generuje potomków:
$f(Sibiu) = g(Arad, Sibiu) + h(Sibiu) = 140 + 253 = 393$
$f(Timisoara) = g(Arad, Timisoara) + h(Timisoara) = 118 + 329 = 447$
$f(Zerind) = g(Arad, Zerind) + h(Zerind) = 75 + 374 = 449$
A^* wybierze Sibiu.

A* : przykład



Jeżeli rozwiniemy Sibiu to otrzymamy potomków, których dodajemy do LISTY OPEN:

$f(Arad) = g(Sibiu, Arad) + h(Arad) = 280 + 366 = 646$

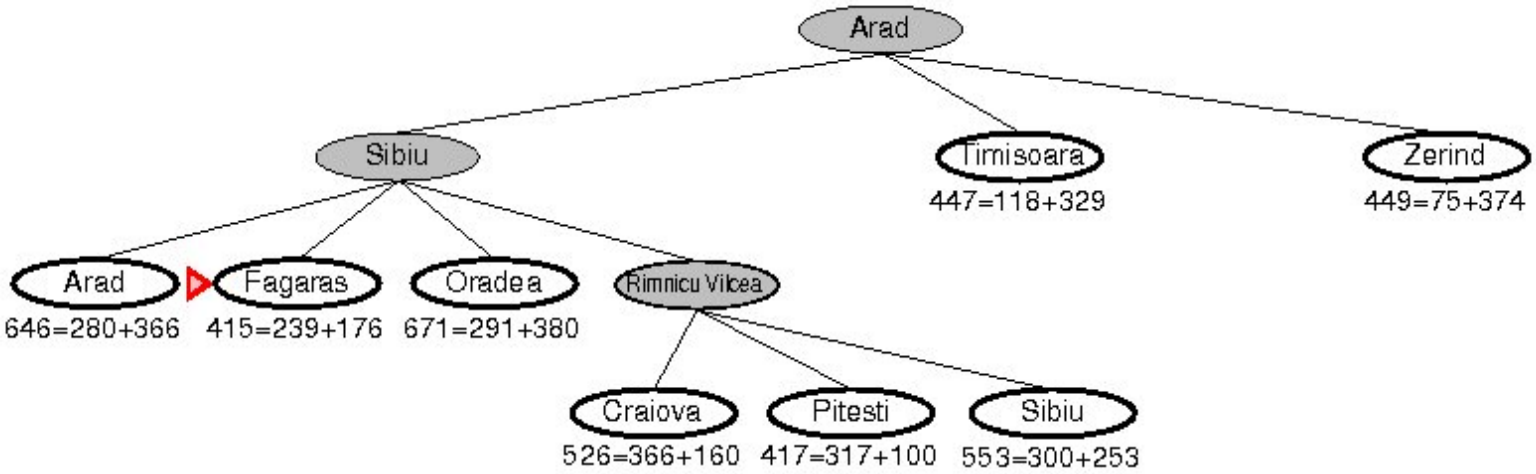
$f(Fagaras) = g(Sibiu, Fagaras) + h(Fagaras) = 239 + 179 = 415$

$f(Oradea) = g(Sibiu, Oradea) + h(Oradea) = 291 + 380 = 671$

$f(RimnicuVilcea) = g(Sibiu, RimnicuVilcea) + h(RimnicuVilcea) = 220 + 192 = 413$

A^* wybierze Rimnicu Vilcea.

A* : przykład



Jeżeli rozwiniemy Rimnicu Vilcea to otrzymamy potomków, których dodajemy do LISTY OPEN:

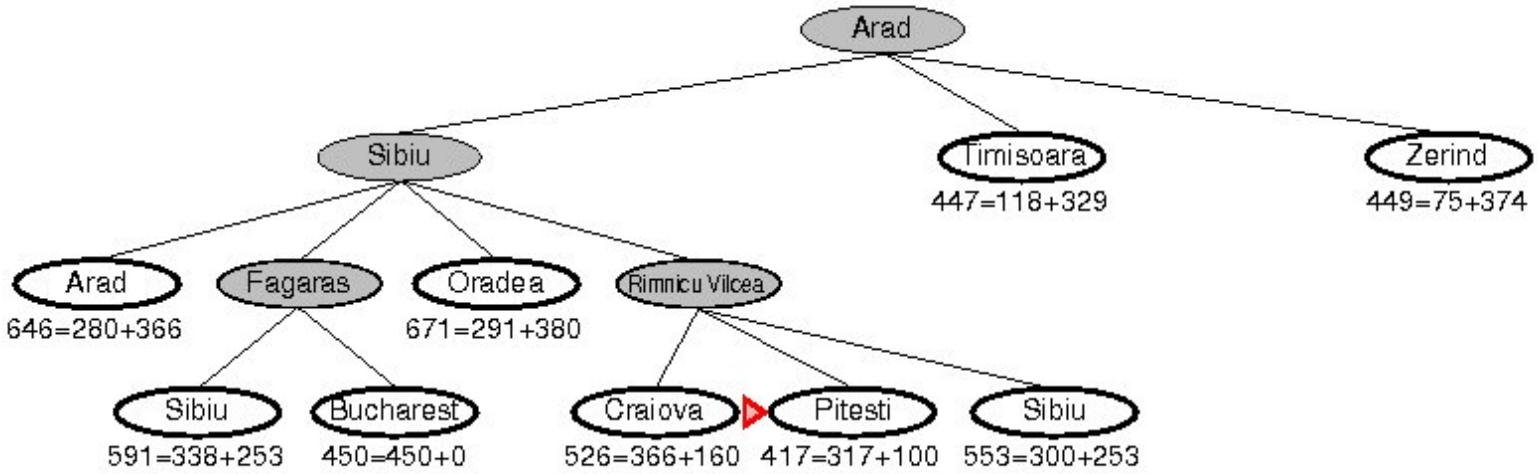
$f(Craiova) = g(RimnicuVilcea, Craiova) + h(Craiova) = 360 + 160 = 526$

$f(Pitesti) = g(RimnicuVilcea, Pitesti) + h(Pitesti) = 317 + 100 = 417$

$f(Sibiu) = g(RimnicuVilcea, Sibiu) + h(Sibiu) = 300 + 253 = 553$

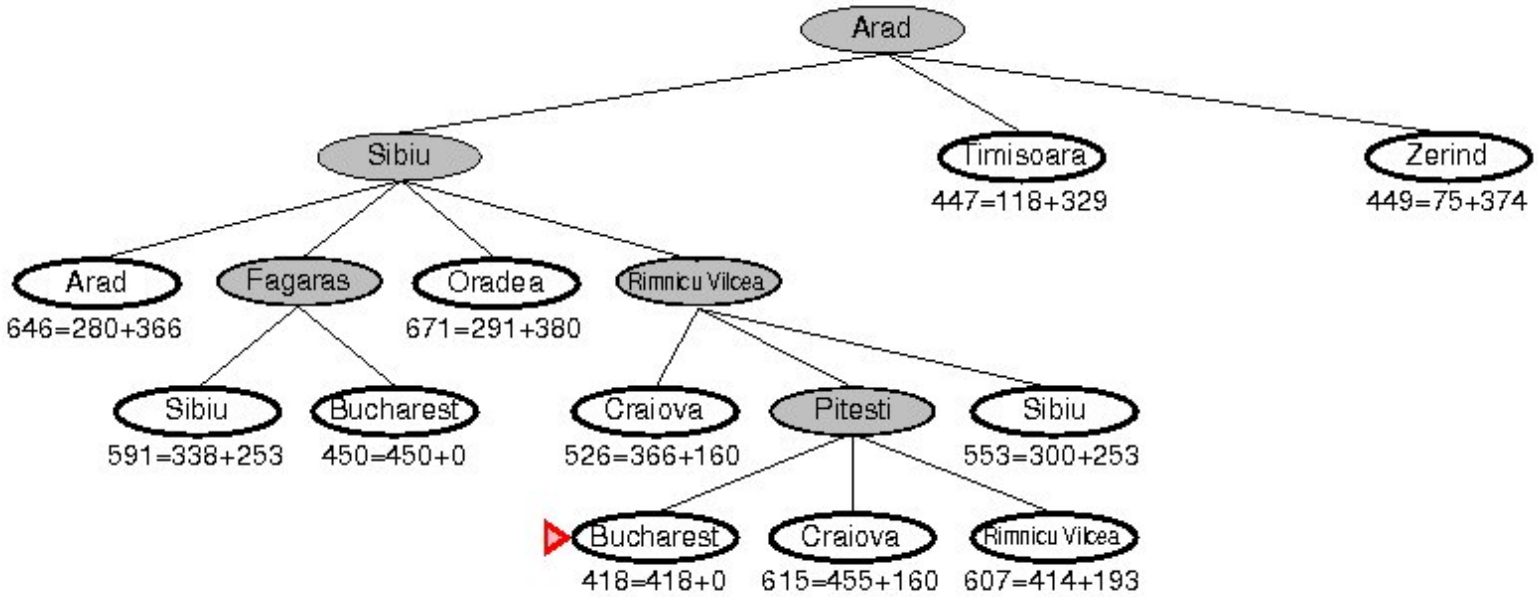
A^* wybierze Fagaras - węzeł pamiętany z poprzednich rozwinięć.

A* : przykład



Jeżeli rozwiniemy Fagaras to najmniejszą wartość $f(Fagaras)$ ma Pitesti (417km), które rozwijamy:
$f(Sibiu) = g(Fagaras, Sibiu) + h(Sibiu) = 338 + 253 = 591$
$f(Bucharest) = g(Fagaras, Bucharest) + h(Bucharest) = 450 + 0 = 450$

A* : przykład



Wybieramy do rozwinięcia Pitesti, bo $f(Pitesti)$ ma najmniejszą wartość i dotrzemy najkrótszą drogą do Bukaresztu (418km):
$f(Bucharest) = g(Pitesti, Bucharest) + h(Bucharest) = 418 + 0 = 418$

Ocena algorytmu A*

Zupełność

Tak, chyba że jest nieskończenie wiele węzłów z $f \leq f(G)$

Złożoność czasowa

Niestety wykładnicza

Obszar zajmowanej pamięci

Przechowuje w pamięci wszystkie węzły (wykładnicza).

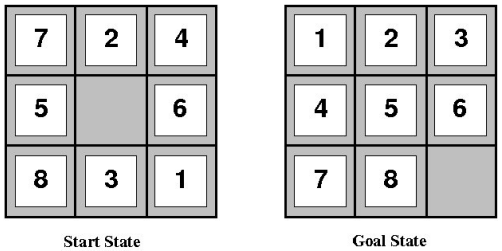
Optymalność

Tak, jeżeli $h(n)$ dopuszczalne.

Jak dobierać heurystykę: przykład

Liczba węzłów w drzewie do przeszukania to 3^{22}, a w grafie 181440.

Proponowane heurystyki:
$h_1(n)$ = liczba niewłaściwie ułożonych elementów
$h_2(n)$ = całkowita odległość Manhattan (tj. liczba pól do lokalizacji końcowej)



$h_1(S) = 6$
$h_2(S) = 4+0+3+3+1+0+2+1=14$

Jak dobierać heurystykę: przykład

Jeżeli $h_2(n) \geq h_1(n)$ dla każdego n (przy czym obie dopuszczalne), to h_2 zdominuje h_1 i gwarantuje przeszukanie mniejszej liczby węzłów.

Przykładowe koszty poszukiwania do zadanego poziomu dla układanki 8-elementowej:

$d = 8$	IDS $= 6384$ węzłów
	$A^*(h_1) = 39$ węzłów
	$A^*(h_2) = 25$ węzłów
$d = 14$	IDS — nieopłacalne
	$A^*(h_1) = 539$ węzłów
	$A^*(h_2) = 113$ węzłów

Dla k heurystyk dopuszczalnych $h_a, h_b, \ldots h_k$, określonych dla zadania wybiera się:

$$h(n) = \max(h_a(n), h_b(n), \ldots, h_k(n))$$

Dla układanki h_2 jest zatem lepsza.