Sieci neuronowe i aplikacje sztucznej inteligencji — sterownik rozmyty dla „odwróconego wahadła”

1 „Odwrócone wahadło” — model matematyczny

Rozpatrywany będzie problem sterowania *jednowymiarowym odwróconym wahadłem*, tj. takim które można rozumieć jako wahadło skierowane ciężarkiem ku górze zainstalowane na pewnym wózku, który ma możliwość poruszania się tylko wzdłuż jednego wymiaru (tylko w lewo lub w prawo). Wahadło również ma tylko jeden stopień swobody — tj. obrót w płaszczyźnie, w której znajdują się wózek i wahadło.

Przyjmijmy następujące oznaczenia: m — masa wahadła, m' — masa wózka, r — długość ramienia wahadła. Dla fizycznego uproszczenia przyjmiemy, że cała masa wahadła skupiona jest w jednym punkcie na szczycie ramienia.

Wektor przyspieszenia kątowego (obrotowego) powstaje jako iloraz

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}, \tag{1}$$

gdzie $\vec{M}$ to wypadkowy wektor momentu siły, a J to moment bezwładności wahadła. Rozpisując mamy:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J} = \frac{\vec{r} \times \vec{mg}}{mr^2}. \tag{2}$$

Moment siły $\vec{M}$ jest iloczynem wektorowym wektora ramienia $\vec{r}$ i wektora siły — w tym przypadku ciężaru $\vec{mg}$. Iloczyn wektorowy jest wektorem skierowanym prostopadle do swoich czynników zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej. W związku z tym zarówno moment siły $\vec{M}$ jak i przyspieszenie kątowe (obrotowe) $\vec{\varepsilon}$ są zgodnie skierowane — prostopadle do płaszczyzny wahadła i wózka.

Skalarnie powyższe równanie należy zapisać jako:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{rmg\sin(\pi-\alpha)}{mr^2} = \frac{rmg\sin\alpha}{mr^2} \\ &= \frac{g\sin\alpha}{r}, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $\pi - \alpha$ oznacza kąt pomiędzy wektorem ramienia a wektorem ciężaru, stąd też samo $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ to kąt pomiędzy aktualnym wektorem ramienia wahadła a ramieniem w ustawieniu pionowym; natomiast g traktowane jest już teraz nie jako wektor przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$ a jako skalar równy w przybliżeniu $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$.

Przyspieszenie kątowe ε może przyjmować zatem wartości dodatnie lub ujemne (lub zero) w zależności od kąta α. Dodatnie wartości ε (w danym momencie czasu) oznaczają, że wahadło będzie obracać się zgodnie ze wskazówkami zegara, wartości ujemne, że przeciwnie do wskazówek zegara.

Zadaniem sterownika rozmytego jest niedopuszczenie od upadku wahadła czyli utrzymywanie kołysania się wahadła jak najbliżej pionu. Sterownik będzie zatem co pewną liczbę kroków czasowych wyliczał i przykładał do krańca wózka odpowiednią siłę sterującą $\vec{F}$, która powinna niejako kontrować wychylenie wahadła. W związku z tym, że problem jest jednowymiarowy, dodatnie wartości F będą oznaczały siłę ciągnącą wózek ku prawej stronie, a wartości ujemne ku lewej stronie.

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na wahadło zadziała wówczas siła skierowana przeciwnie tj. siła $-\vec{F}$. Siła ta jest również źródłem przyspieszenia kątowego (obrotowego), nazwijmy je $\vec{\varepsilon'}$. Należy jednak pamiętać, że siła ta działa w poziomie, podczas gdy ciężar działał w pionie. Zatem licząc iloczyn wektorowy wektora ramienia i wektora $-\vec{F}$ trzeba będzie używać kąta $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Innymi słowy ramię siły będzie tu maksymalne przy pionowym ustawieniu wahadła[1], tj. wtedy, gdy $\alpha = 0$, bo wówczas $\sin(\frac{\pi}{2} - 0) = 1$, natomiast minimalne dla $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, bo wówczas $\sin(\frac{\pi}{2} - \pm\frac{\pi}{2}) = 0$. Skalarnie przyspieszenie kątowe ε' wyrazimy zatem jako:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{r(-F)\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{mr^2} \\ &= \frac{(-F)\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{mr}. \end{aligned} \tag{4}$$

Tym samym przyspieszenie kątowe (obrotowe) wypadkowe, które zadziała na wahadło będzie równe (skalarnie) $\varepsilon + \varepsilon'$.

Wahadło z kroku na krok należy zatem obracać wg wzoru wyprowadzonego poniżej (gdzie ω oznacza prędkość kątową, natomiast Δt jest krokiem czasowym, jakim dyskretyzujemy problem):

$$\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon' &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \\ \omega_{t+1} - \omega_t &= \Delta t(\varepsilon + \varepsilon') \\ \omega_{t+1} &= \omega_t + \Delta t(\varepsilon + \varepsilon') \\ \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} &= \omega_t + \Delta t(\varepsilon + \varepsilon') \\ \alpha_{t+1} - \alpha_t &= \Delta t\omega_t + (\Delta t)^2(\varepsilon + \varepsilon') \\ \alpha_{t+1} &= \alpha_t + \Delta t\omega_t + (\Delta t)^2(\varepsilon + \varepsilon'). \end{aligned} \tag{5}$$

Przesunięcia wózka należy natomiast dokonywać wg wzoru wyprowadzonego poniżej (gdzie a, v, x oznaczają odpowiednio przyspieszenie, prędkość i położenie

[1] A nie jak uprzednio przy poziomym ustawieniu wahadła, kiedy to ciężar był źródłem obrotu.

wózka):

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{F}{m' + m} \\
\frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{F}{m' + m} \\
v_{t+1} &= v_t + \Delta t \frac{F}{m' + m} \\
\frac{\Delta x}{\Delta t} &= v_t + \Delta t \frac{F}{m' + m} \Delta t \\
x_{t+1} &= x_t + \Delta t v_t + (\Delta t)^2 \frac{F}{m' + m}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

2 Proponowane ustawienia i wartości

W eksperymentach proponuje się przyjęcie następujących wartości (przy czym nie są one przymusowe): $m = 1\ kg$, $m' = 5\ kg$, $r = 1\ m$, $\Delta t = 0.01\ s$.

Dodatkowym elementem, który można by wprowadzić do modelu przedstawionego w poprzednim punkcie jest tarcie. Dla uproszczenia zagadnienia tarcie można by zrealizować poprzez pewien współczynnik mniejszy od jedności np. $\beta = 0.95$, który służyłby do pomniejszania prędkości (liniowej wózka i kątowej wahadła) na zasadzie:

$$
\begin{aligned}
v_{t+1} &:= \beta v_{t+1}, \\
\omega_{t+1} &:= \beta \omega_{t+1}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Początkowe wartości dla wychylenia wahadła α_0, prędkości wózka v_0 oraz położenia wózka x_0 należy wylosować. Jako umowę przyjmijmy, że wózek porusza się na odcinku $x \in [-5\ m, 5\ m]$ (należy to wziąć pod uwagę losując v_0). Wyjechanie wózka poza ten zakres niech powoduje zakończenie wykonywania się programu.

3 Sterownik rozmyty

W programie należy zaimplementować (najlepiej jako wydzieloną funkcję) sterownik rozmyty, który co pewną liczbę kroków czasowych[2] Δt będzie jako swoje wyjście zwracał siłę sterującą F. W podstawowej wersji zadania wielkościami wejściowymi będą aktualne α oraz v.

Sugeruje się zaimplementowanie klasycznego sterownika rozmytego Mamdaniego z:

- trójkątnymi lub Gaussowskimi funkcjami przynależności dla wejść,
- operatorem MIN lub PROD dla realizacji przecięcia zbiorów rozmytych (to pojawi się przy obliczaniu stopni aktywacji reguł),
- singletonowymi (jednopunktowymi) zbiorami dla reprezentacji wyjścia tj. siły sterującej (dzięki temu przy defuzyfikacji całkowanie uprości się do sumowania).

[2] Liczba tych kroków, co którą uruchamiamy sterownik, powinna być pewnym ustawialnym parametrem w programie.

Zakresy zmienności dla wejść i wyjść, liczbę oraz rozstawienie zbiorów rozmytych, a także bazę reguł należy odpowiednio dobrać samodzielnie.

4 Wymagania do programu i dodatkowe trudniejsze wersje zadania

W programie wymagana jest część symulacyjna wraz z prostą wizualizacją. Przykład wizualizacji można obejrzeć w załączonym do tego opisu filmie `example.avi`. Film przedstawia 500 kroków symulacji, przy czym po kroku $t = 350$ siła sterująca jest celowo wyzerowana, żeby pokazać upadek wahadła.

Podstawowe i obowiązkowe do wykonania zadanie, to zapobieganie upadkowi wahadła (o ile pozwolą na to warunki początkowe α_0 i v_0).

Wyżej ocenione będą trudniejsze wersje zadania, które są już tylko dobrowolne.

(a) Jako dodatkowe wejście do sterownika oprócz α i v należy wprowadzić położenie wózka x. Celem w tej wersji jest nie tylko utrzymywania wahadła w pionie, ale i utrzymywanie wózka możliwie blisko punktu $x = 0$ (oczywiście należy pamiętać, że początkowe położenie wózka x_0 jest losowane).

(b) Nie jest wprowadzane żadne dodatkowe wejście do sterownika. Celem w tej wersji jest nie tylko utrzymywania wahadła w pionie, ale i ciągłe utrzymywanie wózka w dość szybkim ruchu. Tzn. można umówić się na przykład, że prędkość wózka powinna możliwie często spełniać warunek $|v| \geqslant 1 \ \frac{m}{s}$. Innymi słowy sam wózek powinien się również wahać.