

# 2

## Modelowanie i analiza układów dynamicznych z czasem dyskretnym

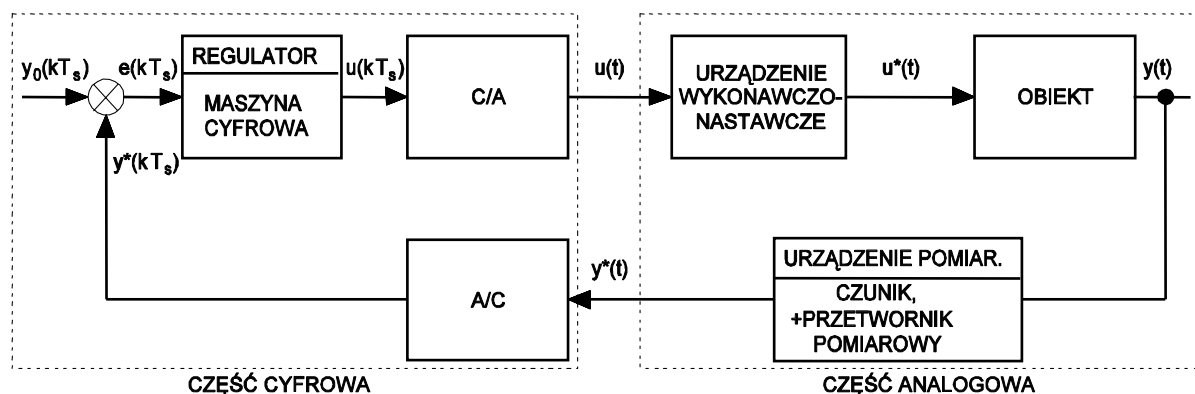
Opracował : dr inż. Sławomir Jaszczak

### 1. Wprowadzenie teoretyczne

Wprowadzenie maszyny cyfrowej (komputera, sterownika mikroprocesorowego, sterownika programowalnego) do układu sterowania w miejsce regulatora analogowego zmienia naturę tegoż układu z ciągłej w czasie w dyskretną (nieciągłą w czasie).

Uproszczony schemat blokowy układu sterowania przedstawiono na rys.2.1. Pozostałe elementy układu sterowania (urządzenia wykonawczo – nastawcze, urządzenia pomiarowe i obiekt sterowania) zachowują oryginalne cechy dynamiczne i statyczne.

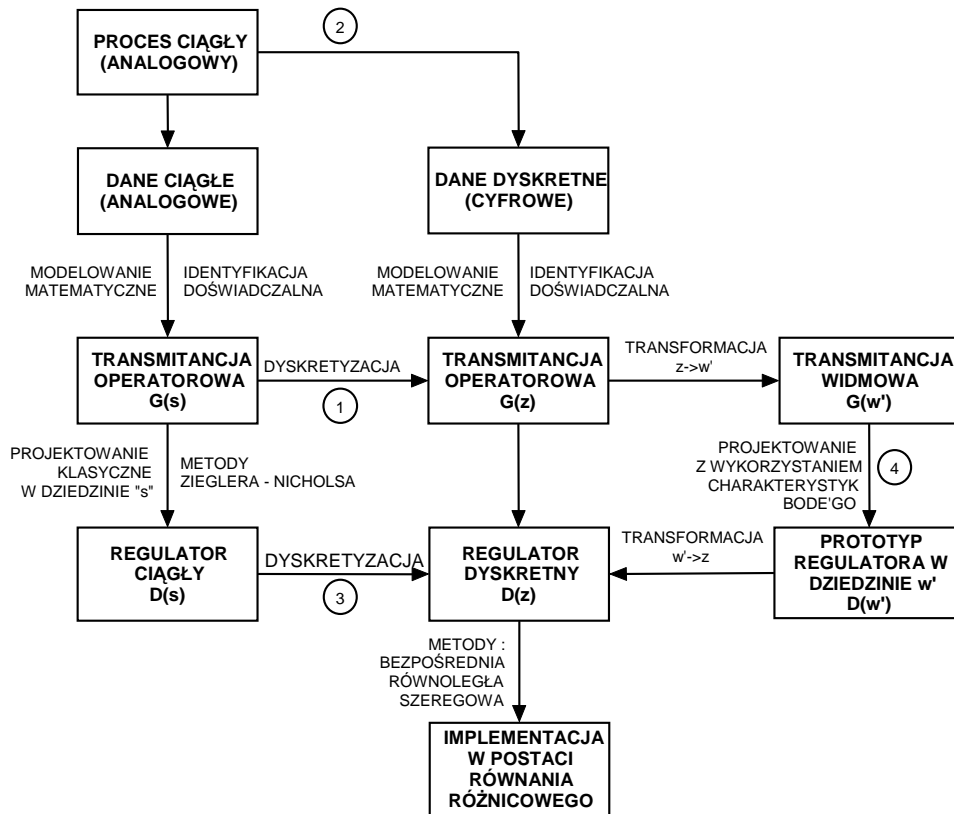
Oprócz dyskretyzacji czasu, będącej efektem procesu próbkowania (ang. sampling) w układzie z maszyną cyfrową występuje dyskretyzacji amplitudy sygnałów, co stanowi efekt operacji kwantowania i kodowania.



Rys.2.1. Uproszczony schemat blokowy układu sterowania z maszyną cyfrową.

Kwestia kodowania, związana z operacją przetwarzania A/C, jest istotna na etapie implementacji algorytmu sterowania, kiedy należy przeanalizować możliwość wystąpienia błędów, wynikających z ograniczonej długości słowa, wykorzystywanego do zaprezentowania wartości rzeczywistej. Z tego powodu nie będzie poruszana na etapie rozważań o dyskretyzacji.

Z dotychczasowych ustaleń wynika, że układ sterowania z maszyną cyfrową w funkcji regulatora stanowi system hybrydowy (cyfrowo – analogowy lub, jeśli pominąć kodowanie dyskretno – ciągły). Powstaje pytanie: jakimi metodami można zaprojektować algorytm sterowania, który zapewni spełnienie wymagań, co do stabilności i jakości działania? W [17] Leigh zaproponował następujące procedury zmierzające do realizacji wyżej wymienionego celu (rys.2.2):



Rys.2.2.Procedury projektowania cyfrowego algorytmu regulacji.

W dalszym ciągu rozważań zajmiemy się metodami 1 i 3. W obu przypadkach niezbędne jest przekształcenie modelu ciągłego (równanie różniczkowe lub transmitancja operatorowa) w model dyskretny (równanie różnicowe lub transmitancja operatorowa w dziedzinie  $z$ ), przy czym dla metody 3 dotyczy algorytmu regulacji, a metody 2 modelu dynamiki obiektu regulacji. W tabeli 1 przedstawiono wady i zalety obydwu procedur.

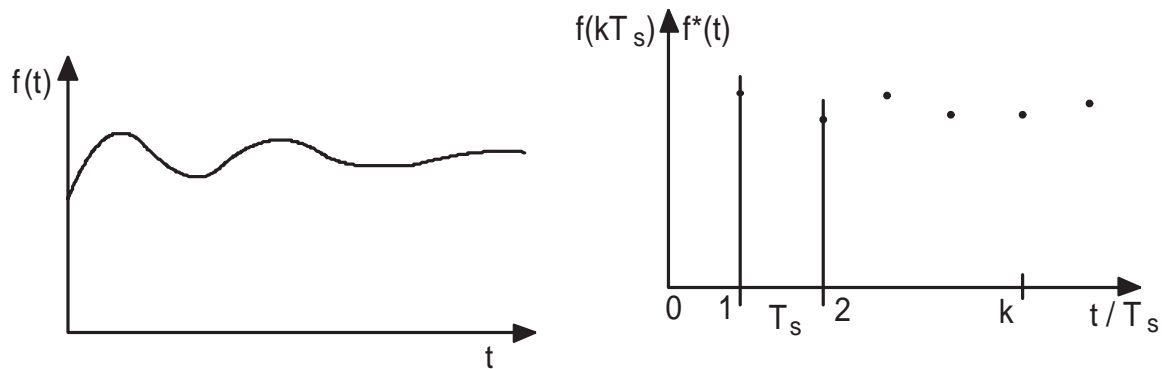
Projektowanie w dziedzinie ciągłej i dyskretyzacji algorytmu	Dyskretyzacja modelu i projektowanie w dziedzinie dyskretnej
+ dobra interpretacja fizyczna	+ uwzględnienie wszystkich elementów modelu (A/C, C/A...) – uwzględnienie efektu utraty informacji
+ brak wpływu $T_s$ na projekt	– + wrażliwość na zmiany $T_s$
+ zgodność dla dostatecznie krótkiego $T_s$	– możliwość zmiany własności modelu
– pogorszenie jakości przy rosnącym $T_s$	+ nowe własności modelu (np. skończony czas sterowania)
– możliwość utraty stabilności przy dyskretyzacji	

Tab.1.Porównanie metod projektowania algorytmów cyfrowych.

Opis i analizę układów dynamicznych z czasem dyskretnym umożliwia dyskretna transformacja Laplace'a inaczej nazywana transformacją  $Z$ .

Załóżmy, że sygnał ciągły  $f(t)$  (rys.2.3a) poddajemy operacji przetwarzania A/C (tj. próbkowania)<sup>1</sup> i uzyskujemy ciąg wartości  $f(kT_s)$ (rys.2.3b).

<sup>1</sup> Na tym etapie rozważań pomijamy kodowanie tj. dyskretyzację amplitudy



Rys.2.3. Proces próbkowania sygnału ciągłego  $f(t)$ .

Ciąg wartości  $f(t)$  oddalonych o czas próbkowania, co odpowiada dyskretnej funkcji  $f^*(t)$ . Funkcję (sygnał) dyskretną  $f^*(t)$  można przetransformować wykorzystując definicję rachunku operatorowego Laplace'a :

$$L\{f^*(t)\} = \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

przy czym można zapisać

$$L\{f^*(t)\} = F^*(s) \quad (2.2)$$

Zgodnie z przyjętym założeniami – funkcja dyskretna  $f^*(t)$  jest określona tylko w chwilach :

$$k = \frac{t}{T_s} \quad (2.3)$$

$$t_k = kT_s$$

Stąd

$$\int_0^{\infty} f^*(t) \cdot e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \cdot e^{-skT_s} = F^*(s) \quad (2.4)$$

Przyjmijmy

$$Z\{f(t)\} = L\{f^*(t)\} = F(z)$$

Stąd

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \cdot (e^{sT_s})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \cdot z^{-k} \quad (2.5)$$

co stanowi definicję dyskretnej transformacji Laplace'a.

Przekształcenie „Z” (dyskretna transformacja „Z”) stanowi podstawowe narzędzie do analizy systemów dynamicznych, dyskretnych w czasie. Praktycznie jest odpowiednikiem transformacji Laplace'a wykorzystywanym przy badaniu układów ciągłych w czasie.

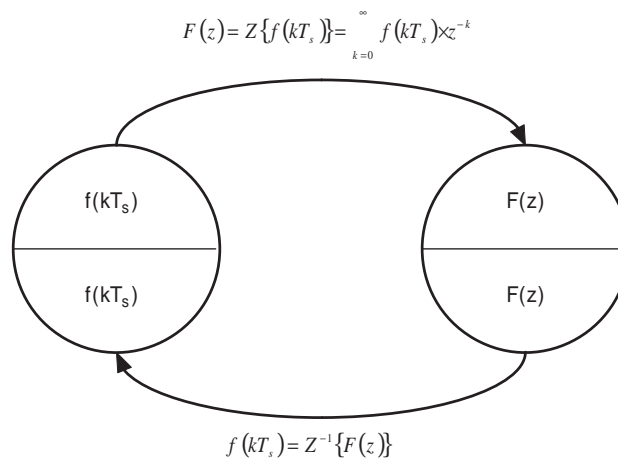
Operator „z” jest analogiem operatora „s” przy założeniu wynikającym z definicji tj.

$$z = e^{sT_s}, \text{ gdzie } s = \sigma \pm j\omega, \quad T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$\omega_s = 2\pi f$$

Zgodnie z definicją (2.5) przekształcenie „Z” jest rozwinięciem szeregu potęgowego względem  $z^{-1}$ . Innymi słowy operator „z” należy utożsamiać z przesunięciem kwantu czasu w

równaniach różnicowych, co odpowiada różniczkowaniu zmiennej zależnej po czasie w równaniach różniczkowych. Schemat przedstawia ideę przekształcenia „Z”



Rys.2.4. Idea przekształcenia „Z”.

Podobnie jak w przypadku transformacji Laplace’a również dla przekształcenia „Z” obowiązują określone własności:

Przyjmijmy  $f(kT_s) = f_k$ ,  $g(kT_s) = g_k$

**1) Liniowość (zasada superpozycji)**

$$Z\{a \cdot f_k + b \cdot g_k\} = a \cdot Z\{f_k\} + b \cdot Z\{g_k\} = a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$$

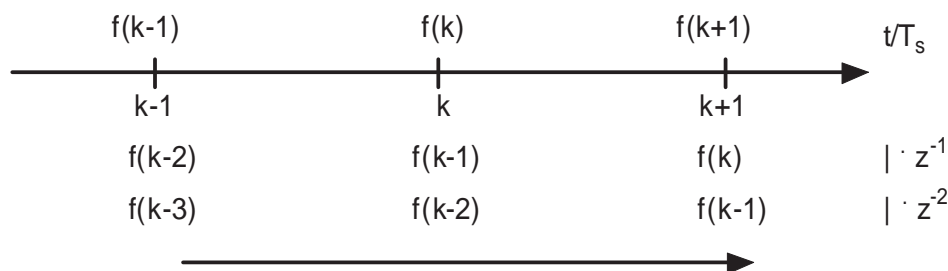
Komentarz: stałe nie podlegają działaniu transformacji

**2) Przesunięcie szeregu w prawo**

$$Z\{f_{k-n}\} = z^{-n} \cdot Z\{f_n\} = z^{-n} \cdot F(z) \quad n \geq 0$$

Komentarz: oznacza to przesunięcie szeregu  $f_k$  wzdłuż osi czasu w prawo o  $n$  – okresów próbkowania, co odpowiada mnożeniu transformaty przez  $z^{-n}$ .

Ilustracja graficzna



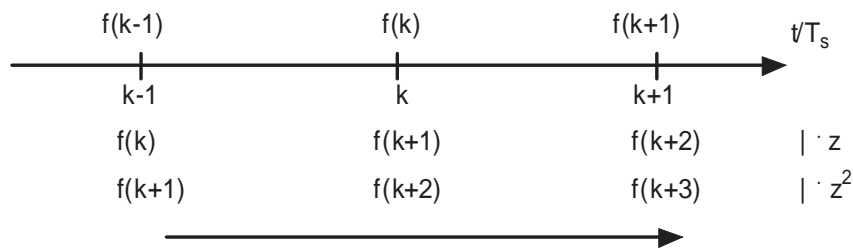
Po wymnożeniu przez  $z^{-1}$ ,  $z^{-2}$  itd. można obserwować „przesuwanie” próbek o określonym indeksie w prawo od oryginalnej pozycji.

**3) Przesunięcie szeregu w lewo**

$$Z\{f_{k+n}\} = z^n \cdot \left\{ Z\{f_k\} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) \cdot z^{-m} \right\} = z^n \cdot F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) \cdot z^{-m}$$

Komentarz: Przy przesunięciu w lewo wzdłuż osi czasu znikają te pierwsze wyrazy szeregu, które po przesunięciu leżą na lewo od punktu zerowego.

Ilustracja graficzna



Po wymnożeniu przez  $z^{-1}$ ,  $z^{-2}$  itd. można obserwować „przesuwanie” próbek o określonym indeksie w lewo od oryginalnej pozycji.

**4) Twierdzenie o wartości początkowej**

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \cdot F(z)$$

wg Ackermanna

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

wg Brzózki

**5) Twierdzenie o wartości końcowej**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} \cdot F(z)$$

wg Ackermanna

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot F(z)$$

wg Brzózki

Komentarze do tw. 5

Jeśli wszystkie bieguny  $F(z)$  znajdują się wewnątrz koła jednostkowego wtedy  $f(kT_s) \rightarrow 0$  dla  $k \rightarrow \infty$ .

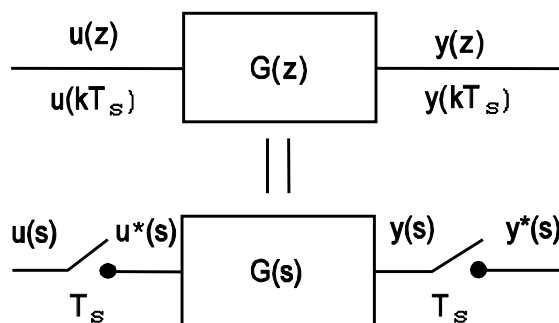
Jeśli  $F(z)$  ma jakikolwiek biegun poza kołem jednostkowym wówczas  $f(kT_s)$  jest nieograniczone i nie posiada granicy – przypadek niestabilny.

Jeśli  $F(z)$  ma bieguny na kole jednostkowym (z wyjątkiem  $z = 1$ ) rozwiązanie charakteryzuje się oscylacjami, które nigdy nie gasną.

Jest tylko jeden przypadek, kiedy  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_s)$  jest skończony i stały oraz spełnia warunki twierdzenia:  $F(z)$  ma biegun  $z = 1$

Przyjmując, że dany jest model ciągły obiektu regulacji w postaci transmitancji operatorowej  $G(s)$  transformacja Z daje możliwość wyznaczania na tej podstawie modelu dyskretnego  $G(z)$ .

Transmitancję dyskretną  $G(z)$  należy interpretować podobnie, jak transmitancję operatorową  $G(s)$  jako zależność między transformatami sygnałów wejście/wyjście dyskretnych w czasie oddalonych o czas próbkowania  $T_s$ , co pokazano na rys.2.5.



Rys.2.5. Ilustracja pojęcia transmitancji dyskretniej.

Podobnie jak w transmitancji  $G(s)$ , w  $G(z)$  występują zera i bieguny, jednak ocena kształtu odpowiedzi układu dyskretnego na dowolne powodzenie nie jest tak prosta jak dla układu ciągłego. W dalszej części zostaną podane wskazówki, w jaki sposób interpretować różne rozkłady zer i biegunów, zakładając jednak, że w przypadku układu dyskretnego należy każdy przypadek rozpatrywać indywidualnie.

Poniżej zostaną przedstawione podstawowe metody dyskretyzacji modelu ciągłego zapisanego w postaci  $G(s)$ .

## 1. Metody opierające się na definicji transformacji Z.

### Metoda bezpośrednia

$$Z\{\alpha^{-1}\{G(s)\}\} = Z\{g(t)\} = G(z)$$

Bezpośrednie wykorzystanie definicji wymaga przeprowadzenia dwóch operacji :

- a) znalezienia oryginału funkcji przejścia  $G(s)$   
( na podstawie tablic lub z definicji )
- b) rozwinięcia funkcji dyskretnej zgodnie z definicją transformacji Z.

Można tego uniknąć wykorzystując tablice przekształceń Z, zawierające transformaty w dziedzinie  $z$  oraz funkcje oryginalne.

### Przykład

Dana jest transmitancja operatorowa obiektu inercyjnego I-go rzędu

$$G(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Wyznaczyć dyskretną transmitancję  $G(z)$ .

Wykorzystując tablice określamy oryginał funkcji  $G(s)^2$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 3 \cdot e^{-2t}$$

Zgodnie z def. (2.5)

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot e^{-2kT_s} \cdot z^{-k} = 3 + 3 \cdot e^{-2T_s} \cdot z^{-1} + 3 \cdot e^{-4T_s} \cdot z^{-2} + 3 \cdot e^{-6T_s} \cdot z^{-3} + \dots = \frac{3z}{z - e^{-2T_s}}$$

Powyższy szereg można zapisać w formie ilorazu.

Wiedząc, że:

$$\begin{aligned} \frac{3}{z - e^{-2T_s}} &= 3 \cdot z^{-1} + 3e^{-2T_s} \cdot z^{-2} + \dots \\ \frac{3 \cdot z}{z - e^{-2T_s}} &= 3 + 3 \cdot e^{-2T_s} \cdot z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

Zadanie upraszcza się, jeżeli dokonamy transformacji z wykorzystaniem tablic.

$$Z\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3 \cdot Z\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 3 \cdot \frac{z}{z - e^{-2T_s}}$$

Wynik jest identyczny.

W przypadku funkcji  $G(s)$  wyższego rzędu, można dokonać rozkładu na ułamki proste, a następnie dokonać dyskretyzacji każdego ułamka z osobna.

<sup>2</sup> załącznik nr 1 – wiersz 4 w tabeli

### Przykład

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}$$

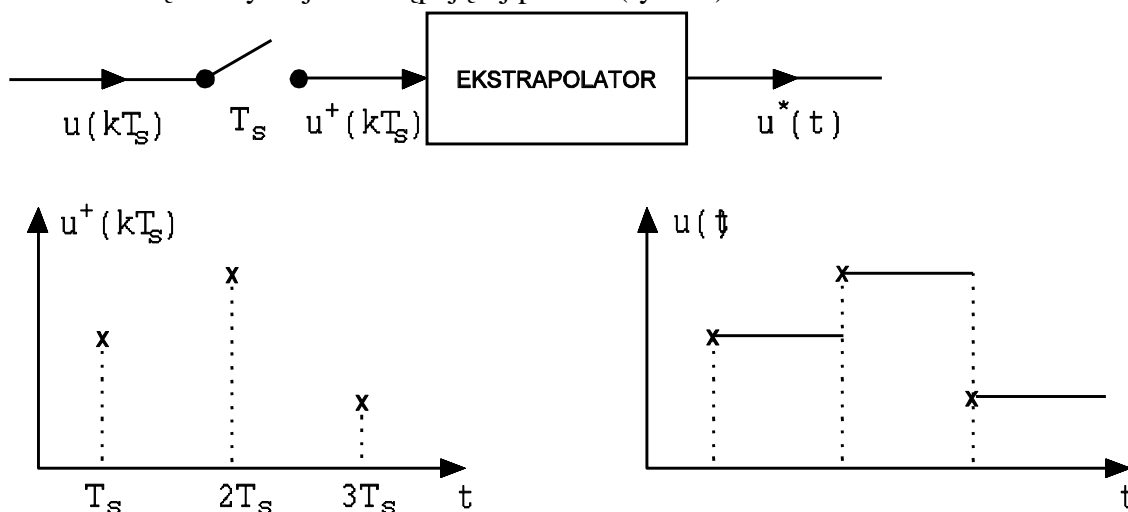
$$G(z) = Z\left\{-\frac{1}{s+1} + \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}\right\} = -Z\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 5Z\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 4Z\left\{\frac{1}{s+3}\right\} =$$

$$= -\frac{z}{z-e^{-T_s}} + \frac{5z}{z-e^{-2T_s}} - \frac{4z}{z-e^{-3T_s}}$$

### Metoda ZOH – zmodyfikowana metoda bezpośrednia

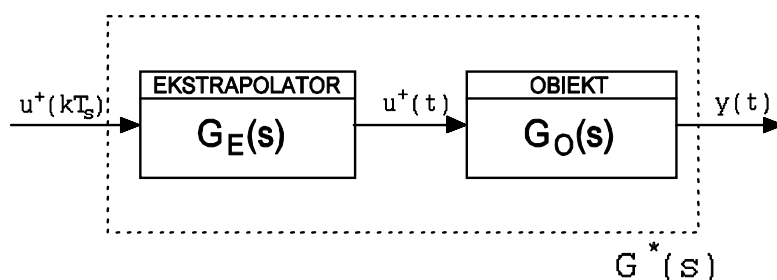
Przedstawiona metoda dyskretyzacji, mimo poprawności matematycznej, nie uwzględnia ograniczeń, które wnoszą do rzeczywistego układu sterowania przetworniki AC i CA. Definicja transformacji Z została wyprowadzona przy założeniu braku tzw. czasu apertury tj. proces próbkowania może być zrealizowany w sposób idealny za pomocą impulsów o czasie trwania równym zero. Jest to niemożliwe do spełnienia w praktycznym układzie. Stąd zazwyczaj model obiektu jest uzupełniany o dynamikę ekstrapolatora (zerowego – zoh (ang. zero order hold) lub pierwszego rzędu – foh (ang. first order hold)). Takie rozwiązanie daje możliwość uwzględnienia dynamiki procesu C/A w dalszym ciągu projektowania.

Z tego powodu dyskretyzacji przeprowadza się w oparciu o metodę zmodyfikowaną, która wykorzystuje informacje o dynamice procesu przetwarzania C/A. Model procesu C/A przedstawia się zazwyczaj w następującej postaci (rys.2.6):



Rys.2.6. Abstrakcyjny model procesu C/A.

Z punktu widzenia zmian dynamiki istotny jest etap podtrzymywania sygnału dyskretnego między chwilami „zamknięcia” wyidealizowanego impulsatora. Oznacza to konieczność uwzględnienia dynamiki ekstrapolatora.



Rys.2.7. Ilustracja wpływu dynamiki ekstrapolatora na dynamikę obiektu.

Na podstawie rys.2.7 można zapisać transmitancję wypadkową:

$$G^*(s) = G_E(s) \cdot G_O(s)$$

$$G^*(z) = Z \cdot \{G_E(s) \cdot G_O(s)\}$$

$$G_E(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}$$

$$G^*(z) = Z \cdot \left\{ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \cdot G_O(s) \right\} = \left( 1 - z^{-1} \cdot Z \cdot \left\{ \frac{G_O(s)}{s} \right\} \right)$$

Dalsza część procedury przebiega tak samo jak dla dyskretyzacji bezpośrednio z definicji.

### Przykład

$$G(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$G^*(s) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} + \frac{3}{s+2} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z \cdot \left\{ \frac{3}{s(s+2)} \right\} =$$

$$= (1 - z^{-1}) \cdot \frac{3}{2} \cdot Z \cdot \left\{ \frac{2}{s(s+2)} \right\} \stackrel{TAB.POZ.7}{=} (1 - z^{-1}) \cdot \frac{(1 - e^{-2T_s})z}{(z-1)(z - e^{-2T_s})} =$$

$$= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z(1 - e^{-2T_s})}{(z-1)(z - e^{-2T_s})} = (z-1) \cdot \frac{(1 - e^{-2T_s})}{(z-1) \cdot (z - e^{-2T_s})} = \frac{(1 - e^{-2T_s})}{(z - e^{-2T_s})}$$

## 2. Metody opierające się na przybliżeniu operacji różniczkowania lub całkowania

W praktyce równie powszechne jest stosowanie metod dyskretyzacji opierających się na przybliżeniach, uzależniających pochodną od tzw. różnic skończonych m.in. :

1. metoda Eulera wprzód (ang. Forward) – metoda ekstrapolacyjna,
2. metoda Eulera wstecz (ang. Backward) – metoda interpolacyjna,
3. metoda Tustina (ang. Trapezoidal) – metoda „trapezów”,

### Metoda EULERA WPRZÓD

W metodzie przyjmujemy, że:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT_s} = \frac{f(k+1) - f(k)}{T_s}$$

Stąd po zastosowaniu tw. o różniczkowaniu :

$$L \left\{ \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT_s} \right\} = L \left\{ \frac{f(k+1) - f(k)}{T_s} \right\}$$

$$F(z) \cdot s = \frac{F(z) \cdot z - F(z)}{T_s}$$

z czego wynika

$$s = \frac{z-1}{T_s}$$

### Przykład



$$G(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$G(z) = \frac{3}{\frac{z-1}{T_s} + 2} = \frac{3T_s}{z-1+2T_s} = \frac{y(z)}{u(z)}$$

### Metoda EULERA WSTECZ

W metodzie przyjmujemy, że:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT_s} = \frac{f(k) - f(k-1)}{T_s}$$

Stąd po zastosowaniu tw. o różniczkowaniu :

$$L \left\{ \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT_s} \right\} = L \left\{ \frac{f(k) - f(k-1)}{T_s} \right\}$$

$$F(z) \cdot s = \frac{F(z) - F(z) \cdot z^{-1}}{T_s}$$

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} = \frac{z-1}{T_s \cdot z}$$

### Przykład

$$G(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$G(z) = \frac{3}{\frac{z-1}{T_s \cdot z} + 2} = \frac{3T_s \cdot z}{z-1+2T_s \cdot z} = \frac{3T_s \cdot z}{z(1+2T_s) - 1}$$

### Metoda TUSTINA

W przypadku metody trapezów przyjmuje się tzw. zależność biliniową :

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

### Przykład

$$G(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$G(z) = \frac{3}{\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{3T_s \cdot (z+1)}{2z-2+T_s \cdot z+T_s} = \frac{3T_s(z+1)}{z(2+T_s)+T_s-z} = \frac{y(z)}{u(z)}$$

Wybór metody dyskretyzacji powinien obejmować analizę dokładności odwzorowania cech dynamicznych modelu ciągłego przez odpowiednik dyskretny, przy czym wiadomo, że osiągnięcie poprawy jakości modelu dyskretnego wiąże się również ze zmniejszaniem tzw. okresu dyskretyzacji, związanego z fizycznym parametrem przetworników A/C i C/A tj. czasem próbkowania  $T_s$ . Efektem ubocznym zmniejszania czasu próbkowania jest, podobnie jak w przypadku operacji A/C, zwiększenie nakładu obliczeń koniecznych do wyznaczenia wewnętrznej, cyfrowej reprezentacji dynamiki procesu sterowanego.

## 2. Część praktyczna

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi metodami dyskretyzacji tj. sposobami zamiany układów ciągłych na dyskretne oraz zależnościami pomiędzy układami ciągłymi i dyskretnymi.

Zostanie zbadany wpływ metody dyskretyzacji oraz czasu próbkowania na utratę wiedzy o dynamice w odniesieniu do obiektu opisanego w dziedzinie ciągłej.

Efekt końcowym ma być uzyskanie umiejętności dyskretyzacji modeli dynamicznych o charakterze ciągłym wraz z doбором optymalnego czasu próbkowania, liczby poziomów skwantowania i zapisu w postaci równań różnicowych.

### 2.1. Analiza w Control System Toolbox (CST)

Systemy liniowe z czasem dyskretnym mogą być reprezentowane w CST poprzez :

- opis w postaci transmitancji operatorowej w dziedzinie  $z$  tzw. transmitancja dyskretna [1,14,36]
- opis w przestrzeni w stanu.

W przypadku zapisu operatorowego współczynniki wielomianu licznika i mianownika funkcji przejścia (transmitancji) są wprowadzane w postaci wektorów wierszowych. Tak więc mając daną ogólną postać funkcji przejścia  $n$  – stopnia :

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

w przestrzeni Matlaba reprezentują ją dwa wektory :

```
>> licz = [bm, bm-1, ..., b1, b0];
>> mian = [an, an-1, ..., a1, a0];
```

**Przykład :**

$$G(s) = \frac{5z^3 + 2z^2 + 7z + 3}{3z^4 + 7z^3 + 2z^2 + 5z + 3}$$

```
>> licz = [5, 2, 7, 3];
>> mian = [3, 7, 2, 5, 3];
```

Obecna wersja CST umożliwia również definiowanie obiektów za pomocą funkcji *tf*. Funkcja *tf* umożliwia przypisanie wektorów *licz* i *mian* do obiektu. Wpisanie nazwy obiektu i zatwierdzenie z linii komend spowoduje wyświetlenie transmitancji. W przypadku obiektów z czasem dyskretnym konieczne jest zdefiniowanie czasu próbkowania  $T_s$  jako trzeciego argumentu.

**Przykład :**

```
>> obiektd = tf(licz,mian,1)
```

```
>> obiektd
Transfer function:
      5 z^3 + 2 z^2 + 7 z + 3
-----
      3 z^4 + 7 z^3 + 2 z^2 + 5 z + 3

Sampling time: 1
```

Można wykorzystać inny sposób wywołania obiektu dyskretnego poprzez :  
`printsys(licz,mian,'z')`

`num/den =`

$$\frac{5z^3 + 2z^2 + 7z + 3}{3z^4 + 7z^3 + 2z^2 + 5z + 3}$$

Analiza obiektów dyskretnych w starszych wersjach CST opierała się o następujące funkcje :

- dimpulse**(licz, mian) - umożliwia wykreślanie charakterystyk impulsowych
- dstep**(licz, mian) - umożliwia wykreślanie charakterystyk skokowych
- dnyquist**(licz, mian) - umożliwia wykreślanie charakterystyk amplitudowo-fazowych
- dbode**(licz, mian) - umożliwia wykreślanie logarytmicznych charakterystyk częstotliwościowych : amplitudowych i fazowych.
- c2dm**(licz,mian) - dyskretyzacja układu ciągłego z wyborem metody.

Polecenia CST, w MatLabie v.6.5 i 7.0, omawiane w ćwiczeniu poświęconym analizie układów z czasem ciągłym są uniwersalne i mogą być stosowane również dla układów z czasem dyskretnym. Różnice dotyczą praktycznie deklarowanych argumentów np. funkcja *tf*.

Poza możliwością deklarowania i analizy obiektów w postaci transmitancji dyskretnych, reprezentujących równania różnicowe istnieje możliwość przeprowadzenia procesu dyskretyzacji z wykorzystaniem metod zaimplementowanych w funkcji *c2d* lub *c2dm*<sup>3</sup>.

#### Przykład :

Zdyskretyzować obiekt opisany następującą transmitancją :

$$G(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

W celu zdeklarowania transmitancji wykorzystamy funkcję *zpk* :

```
>>z=[];
>>b=[-2];
>>k=3;
>>obiekt=zpk(z,b,k)
Zero/pole/gain:
    3
-----
(s+2)
```

Przykładowo dyskretyzację metodą ZOH można przeprowadzić następująco :

```
>> obiektd=c2d(obiekt,1,'zoh')4
```

```
Zero/pole/gain:
    1.297
-----
(z-0.1353)
```

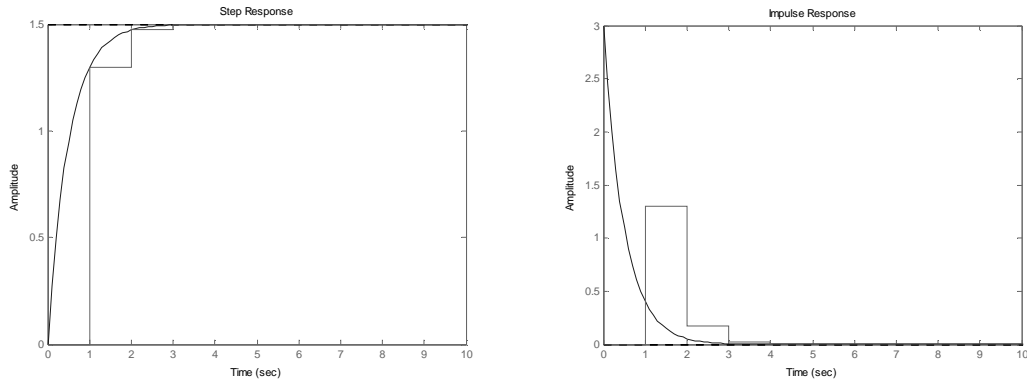
Sampling time: 1

<sup>3</sup> funkcja *c2d* zastąpiła *c2dm*, którą można nadal wykorzystywać mimo, że nie o niej ma żadnych wzmianek w pliku pomocy.

<sup>4</sup> funkcja *c2d* nie umożliwia przeprowadzenia dyskretyzacji metodami Eulera, z tego powodu należy obiekt ciągły dyskretyzować analitycznie i deklarować jako dyskretny.

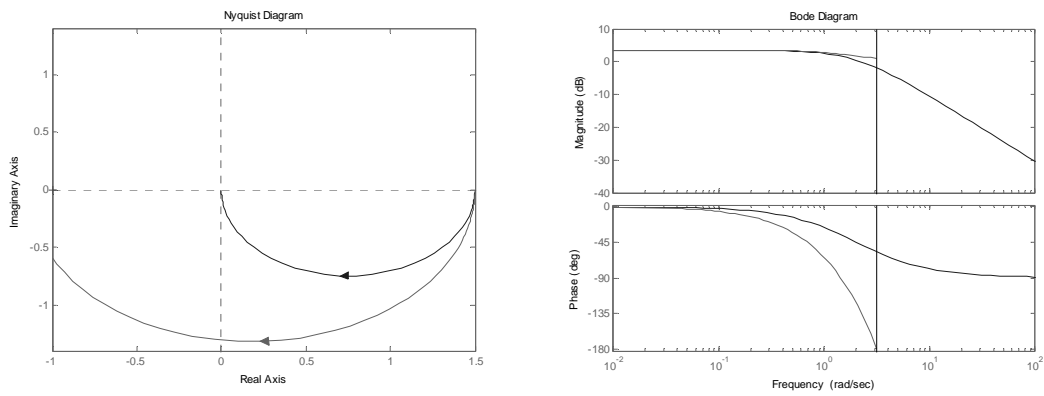
Analizę porównawczą można oprzeć o charakterystyki czasowe, częstotliwościowe i rozkład zer i biegunów.

```
>> step(obiekt,obiektd)
>> impulse(obiekt,obiektd)
```



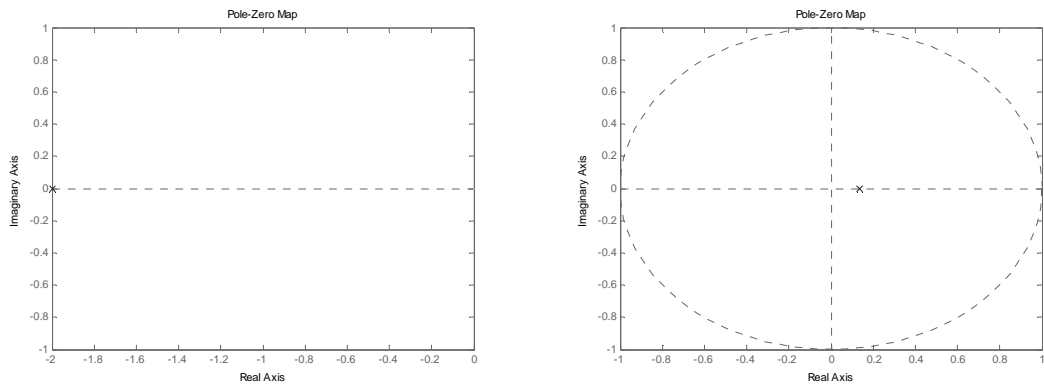
Rys.2.8. Charakterystyki skokowa i impulsowa obiektu ciągłego i dyskretnego.

```
>> nyquist(obiekt,obiektd)
>> bode(obiekt,obiektd)
```



Rys.2.9. Charakterystyki częstotliwościowe obiektu ciągłego i dyskretnego.

```
>> pzmap(obiekt)
>> pzmap(obiektd)
```



Rys.2.10. Rozkład zer i biegunów obiektu ciągłego i dyskretnego.

W wyniku dyskretyzacji dynamika obiektu ciągłego jest zniekształcana wskutek utraty informacji w wyniku operacji próbkowania. Z punktu widzenia dynamiki jest to efekt

niedokładnego odwzorowania położenia zer i biegunów obiektu ciągłego. W trakcie prowadzenia badań należy sprawdzić wpływ metody oraz czasu próbkowania na błędy w odwzorowaniu własności dynamicznych.

### Zadanie 1 – wpływ metody oraz czasu próbkowania na błędy odwzorowania własności obiektu ciągłego

#### a) analiza własności obiektu dyskretnego dla różnych metod dyskretyzacji

Dla czasu próbkowania  $T_s = 1$  [s]

- wykreślić charakterystyki skokowe i impulsowe
- wykreślić charakterystyki częstotliwościowe
- położenie zer i biegunów (sprawdzić, czy bieguny i zera mieszczą się w kole jednostkowym)

stosując następujące metody

A. tustin

B. forward -  $s \rightarrow \frac{z-1}{T_s}$

C. backward -  $s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_s}$ <sup>5</sup>

D. zoh

E. imp - z def. transformacji Z

#### b) analiza własności obiektu dyskretnego dla różnych czasów próbkowania

Dla wybranej metody dyskretyzacji :

- wykreślić charakterystyki skokowe i impulsowe
- wykreślić charakterystyki częstotliwościowe
- położenie zer i biegunów (sprawdzić, czy bieguny i zera mieszczą się w kole jednostkowym)

zmieniając następująco czas próbkowania  $T_s = 0.1, 0.5, 1$  i  $2$  [s]

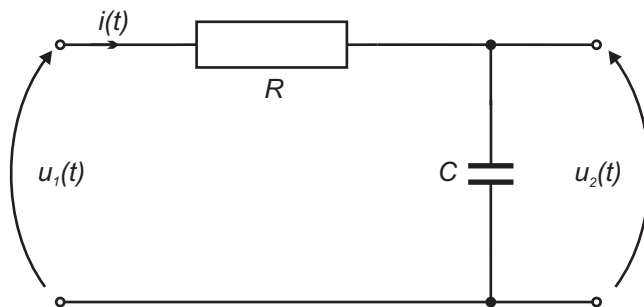
- wyznaczyć analitycznie optymalny czas próbkowania i przeprowadzić analizę

L.p.	$G(s)$	Zestaw 1		Zestaw 2		Zestaw 3		Zestaw 4	
		$k$	1	$k$	1	$k$	1	$k$	1
1	$\frac{k}{(s+s_1) \cdot (s+s_2)}$	$s_1$	-0.2+0.8j	$s_1$	-0.1+0.8j	$s_1$	-0.8+0.8j	$s_1$	-0.2+j
		$s_2$	-0.2+0.8j	$s_2$	-0.1+0.8j	$s_2$	-0.8+0.8j	$s_2$	-0.2+j
		$z$	0	$z$	0	$z$	0	$z$	0
2	$\frac{k \cdot s}{(s+s_1) \cdot (s+s_2)}$	$s_1$	-0.2+0.8j	$s_1$	-0.1+0.8j	$s_1$	-0.8+0.8j	$s_1$	-0.2+j
		$s_2$	-0.2+0.8j	$s_2$	-0.1+0.8j	$s_2$	-0.8+0.8j	$s_2$	-0.2+j
		$z$	0	$z$	0	$z$	0	$z$	0
3	$\frac{k \cdot (s+z_1)}{(s+s_1) \cdot (s+s_2)}$	$k$	1	$k$	1	$k$	1	$k$	1
		$s_1$	-0.2+0.8j	$s_1$	-0.1+0.8j	$s_1$	-0.8+0.8j	$s_1$	-0.2+j
		$s_2$	-0.2+0.8j	$s_2$	-0.1+0.8j	$s_2$	-0.8+0.8j	$s_2$	-0.2+j
		$z_1$	-1	$z_1$	-100	$z_1$	-10	$z_1$	-0.01

<sup>5</sup> Dla metod B i C wyprowadzić analitycznie transmitancje dyskretne stosując podane podstawienia.

## 2.2. Analiza w Simulinku

Proces tworzenia modelu, a następnie analizy zostanie przedstawiony na przykładzie prostego układu dynamicznego.



Założenia :

układ liniowy, czasowo-inwariantny  
 $R = 100$  [Ohm] – opór elektryczny ,  
 $c = 0.03$  [F] – pojemność elektryczna  
 $U_1(t)$  – napięcie wejściowe  
 $U_2(t)$  – napięcie wyjściowe

Po zbilansowaniu spadków napięć z wykorzystaniem prawa Kirchoffa można zapisać :

$$\begin{cases} R \cdot \frac{di}{dt} + c \cdot \int_0^t i(t) dt = U_1(t) \\ c \cdot \int_0^t i(t) dt = U_2(t) \end{cases}$$

Wykorzystując następnie przekształcenie Laplace'a można zapisać układ równań operatorowych :

$$\begin{cases} R \cdot i(s) \cdot s + c \cdot i(s) \cdot \frac{1}{s} = U_1(s) \\ c \cdot i(s) \cdot \frac{1}{s} = U_2(s) \end{cases}$$

z której wynika transmitancja operatorowa :

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R \cdot c \cdot s + 1}$$

**Krok 1 :** Transmitancję  $G(s)$  dyskretyzujemy jedną z przedstawionych metod – w tym przypadku metodą Tustina.

$$G(z) = \frac{1}{\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot R \cdot c + 1} = \frac{T_s \cdot (z+1)}{2 \cdot R \cdot c \cdot z - 2 \cdot R \cdot c + T_s \cdot z + T_s} = \frac{T_s (z+1)}{z(2 \cdot R \cdot c + T_s) + T_s - 2 \cdot R \cdot c}$$

**Krok 2 :** Transmitancję  $G(z)$  zapisujemy w postaci równań stanu, rozpisując osobno licznik i mianownik transmitancji.

$$G(z) = \frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{p(z)}{p(z)} \cdot \frac{T_s (z+1)}{z(2 \cdot R \cdot c + T_s) + T_s - 2 \cdot R \cdot c}$$

gdzie  $p(z)$  stanowi pomocniczą transformatę

$$L : U_2(z) = p(z) \cdot T_s (z+1)$$

$$M : U_1(z) = p(z) \cdot (z(2 \cdot R \cdot c + T_s) + T_s - 2 \cdot R \cdot c)$$

wykorzystując twierdzenie o przesunięciu szeregu w lewo zapisujemy równania różnicowe :

$$U_2(k) = p(k+1) \cdot T_s + p(k) \cdot T_s$$

$$U_1(k) = p(k+1) \cdot (2 \cdot R \cdot c + T_s) + p(k) \cdot (T_s - 2 \cdot R \cdot c)$$

**Krok 3 :** Na podstawie równania drugiego wyznaczamy  $p(k+1)$ . Przyjęcie założenia, że znamy zmienną  $p(k+1)$  tzn. istnieje potencjalny generator sygnału  $p(k+1)$ , stanowi podstawę do utworzenia modelu.

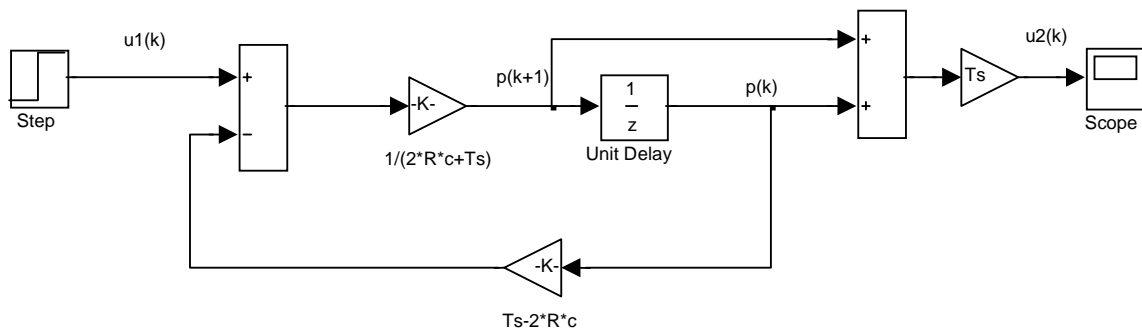
$$p(k+1) = \frac{U_1(k) - p(k) \cdot (T_s - 2 \cdot R \cdot c)}{2 \cdot R \cdot c + T_s}$$

Do rozwiązania równania będą potrzebne : elementy sumujące, wzmacniające (**Sum i Gain** z przybornika **Math Operations**) i opóźniające  $z^{-1}$  (**Unit Delay** z przybornika **Discrete**). Każdy z wymienionych elementów należy przeciągnąć do okna edycji. Do wejścia obiektu należy doprowadzić sygnał pobudzający (tu : skok jednostkowy o określonej amplitudzie) - **Step Input** ze zbioru **Sources**.

**Krok 4** : Zebrane elementy umożliwiają już zbudowanie matematycznego modelu obiektu. Analizując kolejne operacje matematyczne w równaniu, którym poddawane są poszczególne sygnały, analogicznie łączy się elementy z odpowiednio wpisanymi parametrami. Wybrane operacje na elementach:

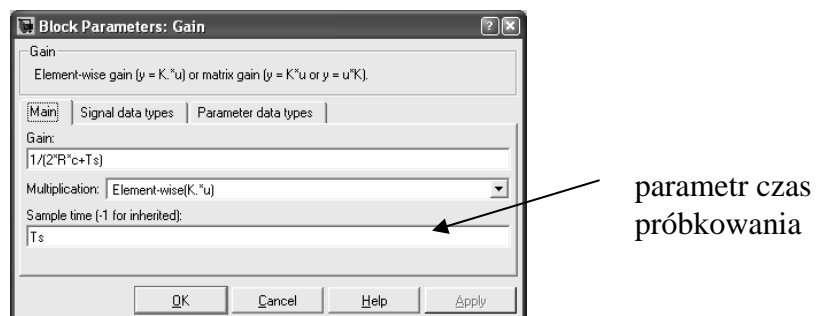
- zmiana parametrów elementu – kliknąć na elementach **Gain** dwukrotnie i wpisać nowe parametry w sposób symboliczny;
- rysowanie strzałek - kliknąć na wyjściu jednego elementu i przeciągnij strzałkę do wejścia drugiego (połączenia można tworzyć w formie odcinków);
- odbicie lustrzane – zaznaczyć element a następnie wybrać z menu **Format->Flip Block** (lub Ctrl+i).
- obrót o 90 stopni - – zaznaczyć element a następnie wybrać z menu **Format->Rotate Block** (lub Ctrl+R).

Efektom działań jest następujący model :



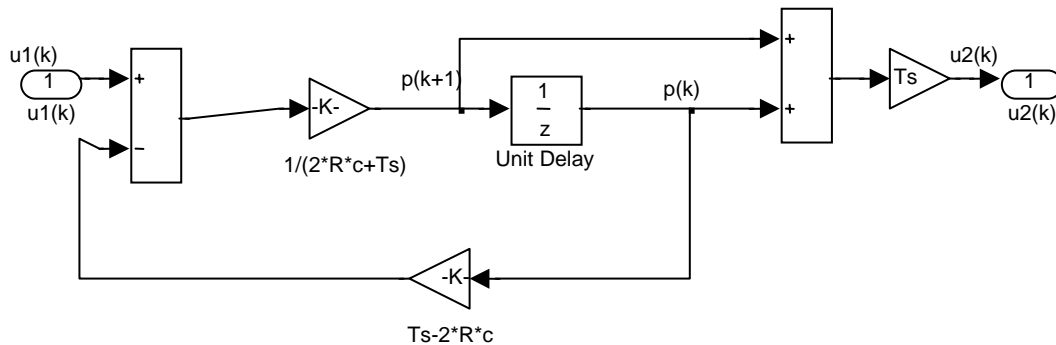
Rys.2.11.Model dyskretny przed zgrupowaniem i zamaskowaniem.

W przypadku modelowania dyskretnego należy pamiętać o sparametryzowaniu czasu próbkowania w każdym elemencie składowym modelu, co przedstawiono przykładowo dla elementu typu Gain na rysunku poniżej.



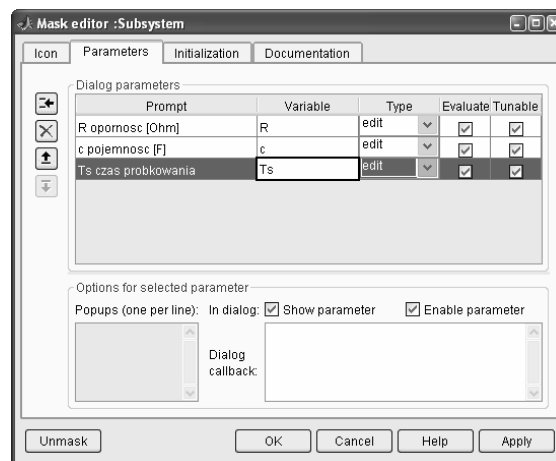
Rys.2.12.Ustawienia parametrów w modelu stworzonym w Simulinku.

**Krok 5:** Tak przygotowany model można przekształcić w nowy element. W celu zgrupowania należy zaznaczyć wszystkie elementy w oknie edycyjnym poza elementem **Step Input**, **Scope** i wybrać z menu **Edit->Create SubSystem**. Utworzony element nie posiada standardowego okna dialogowego i ikony (po dwukrotnym kliknięciu, zamiast pól do określenia parametrów, pokaże się pełna struktura). Elementy in1 i out1 odpowiadają portom wejściowym i wyjściowym modelu. Można zmienić ich etykiety na  $u1(k)$  i  $u2(k)$ , wówczas te nazwy pojawią się na modelu zgrupowanym.

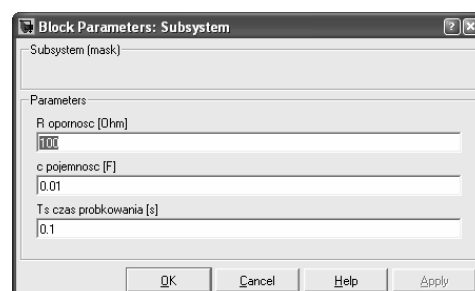


Zgrupowany model należy zamaskować **Edit->Mask SubSystem**. W zakładce **Icon** określamy ikonkę bloku (jeśli pozostawimy puste pole wówczas ikoną będą etykiety sygnałów modelu).

W zakładce **Parameters** definiujemy zmienne, które będą widoczne w oknie dialogowym interfejsu. W przypadku modelu dyskretnego należy zapewnić możliwość wprowadzania czasu próbkowania  $T_s$



Odtąd nowy element będzie zachowywał się tak samo, jak standardowe elementy Simulinka, czyli po dwukrotnym kliknięciu będzie można wprowadzić wartości parametrów.

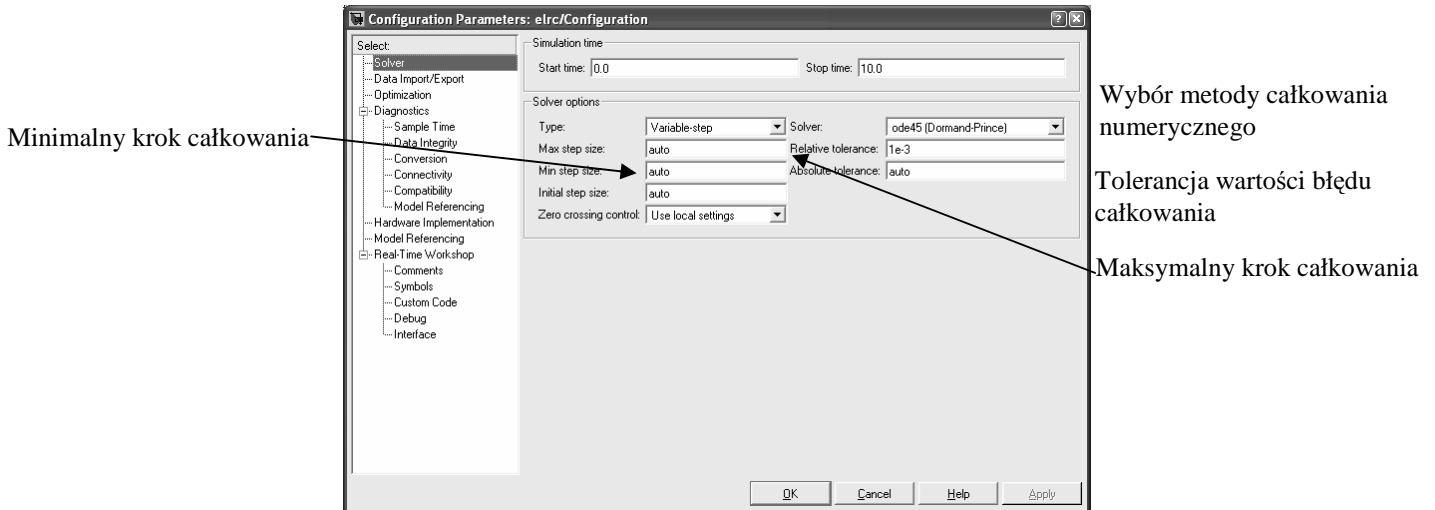




**Krok 6:** Obejmuje przygotowanie symulacji: **Simulation-> Configuration Parameters**. Należy określić: metodę rozwiązania, czas symulacji **Start Time: 0.0, Stop Time** : np. 20.0 oraz parametry metody **Min Step Size : 0.001, Max Step Size : 1**. Symulację rozpoczynamy z menu **Simulation->Start** .

Czas początkowy

Czas końcowy



Jeśli wszystkie elementy mają charakter dyskretny można wybrać opcję **Solver -> discrete (no continuous states)**, co zapobiega wyświetlaniu błędu w Matlab Command Window : „Warning: The model 'elrcd' does not have continuous states...”

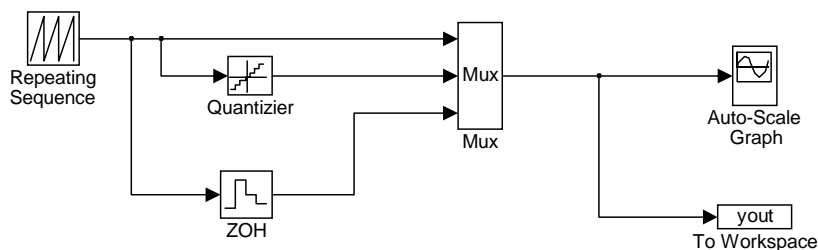
### Zadania dodatkowe

1. Wyprowadzić modele dla pozostałych metod dyskretyzacji i porównać odpowiedzi na pobudzenie w postaci skoku jednostkowego.
2. Wykorzystując dyskretny model elementu Rc ( $R=100$ ,  $c=0.01$ ,  $T_s=1$ , Stop time (czas symulacji) = 1000)
  - zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega=1\text{rad/s}$ ,
  - zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega=11\text{rad/s}$  i zaobserwować efekt nakładania się częstotliwości (aliasing).
3. Analiza procesu kodowania (kwantyzacji amplitudy) i ekstrapolacji w programie Simulink

Wykorzystując elementy :

Element	Menu
Quantizier	Discontinuities
Zero Order Hold	Discrete
Repeating Sequence	Sources
Auto Scale Graph	Sinks
To workspace	Sinks
Mux	Signal Routing

skonstruuj układ jak na rysunku poniżej.



i porównaj sygnał oryginalny z przetworzonymi w układzie kwantującym i podtrzymującym próbki sygnału oryginalnego pobierane, co czas próbkowania.

Należy sporządzić przebiegi sygnałów dla poniższych ustawień układów przetwarzających:

Układ kwantujący (Długość słowa)	3 bity	6 bitów	8 bitów	12 bitów
Układ podtrzymujący (Czas próbkowania [s])	2,1,0.5,0.2,0.1	2,1,0.5,0.2,0.1	2,1,0.5,0.2,0.1	2,1,0.5,0.2,0.1

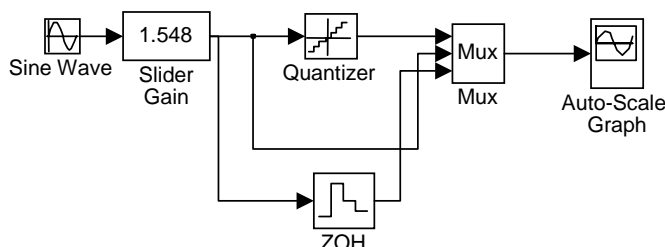
zakładając, że sygnał oryginalny w bloku **Repeating Sequence** zdefiniowano następująco :

Time values : [0 20 20]

Output values : [0 12 0]

Zapisać wyniki każdej symulacji w postaci plików tekstowych, oznaczając błędy kwantyzacji (zaokrąglenia i odcięcia) oraz błędy podtrzymywania.

Błędy numeryczne, wynikające z zastosowania układów przetwarzających można również zaobserwować w układzie :



## Praca domowa

1. Zdiskretyzować model obiektu rzeczywistego (wybrać na podstawie tabeli poniżej) metodami Eulera wstecz i Tustina, a następnie opracować model w Simulinku. Porównać odpowiedź modelu dyskretnego z odpowiedzią modelu ciągłego.

Zespół	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Typ obiektu	Silnik DC jako obiekt sterowania prędkością (bez obciążenia)	Napęd dysku twardego HDD	Amortyzator samochodowy bez ogumienia	Amortyzator samochodowy z ogumieniem (pobudzenie – siła)	Sprzęgło hydrauliczne	Amortyzator samochodowy z ogumieniem (pobudzenie – siła)	Silnik DC jako obiekt sterowania kątem obrotu (bez obciążenia)	Układ pneumatyczny zbiornik-siłownik-tłokowy

- Wybraną transmitancję dyskretną przekształcić w równanie różnicowe metodą bezpośrednią i wyznaczyć numerycznie 5 próbek odpowiedzi na skokową zmianę sygnału pobudzającego  $u(kT_s)=1(kT_s)$ .
- Sprawdzić analitycznie jakość uzyskanej aproksymacji dyskretnej, wyznaczając wartość końcową szeregu (pobudzenie w postaci skoku jednostkowego) oraz 5 próbek sygnału wyjściowego metodą długiego dzielenia.



## Pytania kontrolne

- Na czym polega metoda dyskretyzacji modelu ciągłego ?
  - forward
  - backward
  - trapezoidal
  - zoh
- Co to jest czas próbkowania ?
- Jakie efekty powiązane z czasem próbkowania powoduje dyskretyzacja ?
- Wyjaśnij pojęcie kwantyzacji w odniesieniu do dyskretyzacji ?
- Ile wynosi poziom skwantowania sygnału ciągłego przy założeniu, że karta przetwornikowa posiada 8 bitowe unipolarne wyjście analogowe w zakresie 12 V ?
- Napisz m-skrypt umożliwiający przeprowadzenie analizy czasowej i częstotliwościowej modelu ciągłego opisanego równaniem różniczkowym, oraz jego dyskretyzację i analizę modelu dyskretnego.
- Omów metodykę praktycznego sporządzania charakterystyki amplitudowo-fazowej obiektu dynamicznego.
- Na czym polega różnica między elementem statycznym i dynamicznym ?
- Podaj kilka metod doboru optymalnego czasu próbkowania.
- W jakich jednostkach określa się przebieg modułu na charakterystyce amplitudowej ?
- Wyjaśnij pojęcie zer i biegunów transmitancji.
- Wyznaczyć charakterystykę czasową układu opisanego równaniem różniczkowym. Jaki to układ?
- Dana jest transmitancja. Podaj charakterystykę skokową lub impulsową lub amplitudowo-fazową lub charakterystyki Bode'go:
- Wyznaczyć odpowiedź układu o transmitancji (będzie podana) dla wymuszenia skokowego i określić stałą czasową układu.
- W jakich jednostkach mierzy się moduł ?
- Jaką wielkość w układach automatyki wyraża się w dB Podać przykład.
- W jakich jednostkach mierzy się przesunięcie fazowe ?
- Podaj interpretację geometryczną modułu i przesunięcia fazowego (na płaszczyźnie częstotliwościowej zmiennej zespolonej ).
- Amplituda sygnału wejściowego wynosi  $x$ , wyjściowego  $y$ . Ile wynosi wzmocnienie sygnału w decybelach ?
- Określić różnicę między osiami liczbowymi charakterystyki amplitudowej tego

- samego układu dynamicznego w skali liniowej i logarytmicznej.
21. Podaj transmitancję elementu... (wszystkie, które należało przygotować : proporcjonalny, inercyjny I-go rzędu, itd)
  22. Podaj przykład fizyczny elementu .... (wszystkie, które należało przygotować : proporcjonalny, inercyjny I-go rzędu, itd);
  23. Dana jest charakterystyka skokowa pewnego elementu. Znając wartość skoku jednostkowego, podaj nazwę obiektu, transmitancję (nazwij i wyznacz wartości parametrów) i wykreśl charakterystyki częstotliwościowe oznaczając dokładnie punkty charakterystyczne.
  24. Dana jest charakterystyka amplitudowo-fazowa pewnego elementu. Podaj nazwę obiektu, transmitancję (nazwij i wyznacz wartości parametrów) i wykreśl charakterystyki czasowe oznaczając dokładnie punkty charakterystyczne i charakterystyki Bode'go.
  25. Dana jest charakterystyki Bode'go pewnego elementu. Podaj nazwę obiektu, transmitancję (nazwij i wyznacz wartości parametrów) i wykreśl charakterystyki czasowe i amplitudowo-fazową oznaczając dokładnie punkty charakterystyczne.
  26. Jakie efekty powiązane z czasem próbkowania powoduje dyskretyzacja ?
  27. Na czym polega zjawisko aliasingu ?
  28. Wyjaśnij graficznie różnice między sygnałami analogowymi i cyfrowymi.
  29. Czy sygnał dyskretny i cyfrowy to pojęcia tożsame ? Wyjaśnij
  30. Czy sygnał ciągły i analogowy to pojęcia tożsame ? Wyjaśnij
  31. Dane jest równanie różnicowe. Zamień równanie w transmitancję dyskretną.
  32. Dana jest transmitancja dyskretna. Zamień w równanie różnicowe metodą bezpośrednią lub kaskadową lub równoległą.
  33. Dana jest transmitancja dyskretna. Wykorzystując elementy typu : sumator,  $z^{-1}$ , wzmacnienie narysuj schemat blokowy układu realizującego powyższą transmitancję. (Przy przekształceniu wykorzystać tw. o przesunięciu w lewo)
  34. Ile wynosi poziom skwantowania (LSB) sygnału ciągłego przy założeniu, że karta przetwornikowa posiada 8 bitowe unipolarne wyjście analogowe w zakresie 12 V ?
  35. Co to jest rozdzielczość przetwornika AC lub CA ?
  36. Dane jest następujące słowo (będzie podane), reprezentujące próbkę sygnału sterującego. Zakładając, że karta posiada wyjście analogowe bipolarne w zakresie  $\pm 12$  [V], podaj wartość rzeczywistą sygnału.
  37. Elementy przetwornika AC – schemat blokowy i działanie.
  38. Elementy przetwornika CA – schemat blokowy i działanie.
  39. Model matematyczny przetwornika CA.
  40. Narysuj schemat blokowy cyfrowego układu regulacji. Oznacz i nazwij sygnały oraz zaznacz część analogową i cyfrową.
  41. Wymień i omów negatywne efekty, występujące w cyfrowych układach regulacji.
  42. Omów działanie elementów komputerowego układu sterowania.
  43. Podaj definicję transmitancji dyskretniej.
  44. Napisz twierdzenie o liniowości i opisz je;
  45. Napisz twierdzenie o przesunięciu w lewo;
  46. Napisz twierdzenie o przesunięciu w prawo;
  47. Napisz twierdzenie o wartości końcowej.
  48. Napisz twierdzenie o wartości początkowej.
  49. Dana jest transformata dyskretna pewnego sygnału. Oblicz do jakiej wartości dąży sygnał rzeczywisty.

## Literatura

### Istotność określonej pozycji literaturowej:

A - podstawowa, P – pomocnicza, C - rozszerzająca zakres przedmiotu, L - do laboratorium U – uzupełniająca

1.	A	Amborski K.	Teoria sterowania - podręcznik programowany	PWN, Warszawa 1987,
2.	P	Ackermann J.	Regulacja impulsowa	PWN, Warszawa 1976
3.	U	Astrom K., Wittenmark B.	Computer controlled systems	Prentice Hall London 1984
4.	U	Auslander D.M., Tham C.H.	Real –Time software for control : Program examples in C	
5.	L	Brzózka J., Dorobczyński L.	Programowanie w MatLab	Mikom, Warszawa 1998
6.	L	Brzózka J.	Ćwiczenia z automatyki w Matlabie i Simulinku	PWN, Warszawa 1997
7.	L	Brzózka J., Dorobczyński L.	Matlab – środowisko obliczeń naukowo-technicznych	Mikom, Warszawa 1998
8.	U	Canon R.H. jr.	Dynamika układów fizycznych	WNT Warszawa 1973
9.	C	Chorowski B., Werszko M.	Mechaniczne urządzenia automatyki	Mikom, Warszawa 2005
10.	U	Dorf R.C., Bishop R.H.	Modern control systems	
11.	C	Findeisen W.	Struktury sterowania dla złożonych systemów	Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1997,
12.	C	Fortuna Z., Macukow, Waśowski J.	Metody numeryczne	WNT, Warszawa 1998
13.	L	Frelek B. i inni	Laboratorium podstaw automatyki	Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 1984,
14.	P	Gutowski R.	Równania różniczkowe zwyczajne	WNT, Warszawa 1971
15.	A	Kaczorek T.	Teoria sterowania	Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976,
16.	P	Kudrewicz J.	Przekształcenie Z i równania różnicowe	PWN, Warszawa 2000
17.	U	Leigh J.R.	Applied digital control	Prentice Hall, London 1985
18.	P	Leja F.	Funkcje zespolone	PWN, Warszawa 1967
19.	P	Markowski A., Kostro J., Lewandowski A.	AUTOMATYKA w pytaniach i odpowiedziach	WNT, Warszawa 1985,
20.	P	Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.	Podstawy automatyki	Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1990, 1992 i nowsze,
21.	L	Mrozek B., Mrozek Z.	Matlab – uniwersalne środowisko do obliczeń naukowo technicznych.	PWN, Warszawa 1987
22.	P	Niederliński A.	Systemy i sterowanie, wstęp do automatyki i cybernetyki technicznej	WNT, Warszawa 1972
23.	U	Ogata K.	Modern control engineering	
24.	P	Osiowski J.	Zarys rachunku operatorowego	WNT, Warszawa 1972
25.	A	Pełczewski W.	Teoria sterowania	WNT, Warszawa 1980,
26.	C	Pizoń A.	Elektrohydrauliczne analogowe i cyfrowe układy automatyki	WNT, Warszawa 1995
27.	L	Praca zbiorowa	Ćwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki	Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995,
28.	P	Pułaczewski J.	Podstawy regulacji automatycznej	WSiP, Warszawa 1980
29.	A	Pułaczewski J., Szacka K., Manitius A.	Zasady automatyki	WNT, Warszawa 1974,
30.	P	Red. Findeisen W.	PORADNIK INŻYNIERA AUTOMATYKA	WNT, Warszawa 1973 i nowsze,
31.	L	Red. Mikulczyński T.	Podstawy automatyki	Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995,
32.	P	Szopliński Z.	Automatyka stosowana	Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1980,
33.	A	Takahashi Y., Rabins M. , Auslander D.M.	Sterowanie i systemy dynamiczne	WNT, Warszawa 1972
34.	A	Traczyk W.	Układy cyfrowe. Podstawy teoretyczne i metody syntezy	WNT, Warszawa 1982,
35.	U	Wajs W., Byrski W., Grega W.	Mikrokomputerowe systemy sterowania	
36.	L	Zalewski, Cegiela	Matlab - obliczenia numeryczne i ich zastosowania	
37.	P	Żelazny M.	Podstawy automatyki	

Załącznik nr 1

	$F(s)$	$f(t) = L^{-1}[F(s)]$	$f_{(kT)} = f_k$	$Z[f_k] = F(z)$
1	$\frac{1}{s}$	1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$c^k$ $c = e^{-aT}$	$\frac{z}{z-c}$
5	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$(kT)c^k$ $c = e^{-aT}$	$\frac{cTz}{(z-c)^2}$
6	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{2}(kT)^2c^k$ $c = e^{-aT}$	$\frac{T^2}{2} \frac{cz(z+c)}{(z-c)^3}$
7	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - c^k$ $c = e^{-aT}$	$\frac{(1-c)z}{(z-1)(z-c)}$
8	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}[at - (1 - e^{-at})]$	$\frac{1}{a}[kaT - 1 + c^k]$ $c = e^{-aT}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-c)z}{a(z-1)(z-c)}$
9	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-kaT)c^k$ $c = e^{-aT}$	$\frac{z^2 - c(1+aT)z}{(z-c)^2}$
10	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$1 - (1+kaT)c^k$ $c = e^{-aT}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-c} - \frac{caTz}{(z-c)^2}$
11	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$c^k - d^k$ $c = e^{-aT}$ $d = e^{-bT}$	$\frac{(c-d)z}{(z-c)(z-d)}$
12	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$-ae^{-at} + be^{-bt}$	$-ac^k + bd^k$ $c = e^{-aT}$ $d = e^{-bT}$	$\frac{(b-a)z^2 - (bc-ad)z}{(z-c)(z-d)}$
13	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{a-b}$	$1 + \frac{bc^k - ad^k}{a-b}$ $c = e^{-aT}$ $d = e^{-bT}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{b}{a-b} \frac{z}{z-c} - \frac{a}{a-b} \frac{z}{z-d}$
14	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\sin \beta t$	$\sin k\beta T$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
15	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos \beta t$	$\cos k\beta T$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$

16	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$\sinh \beta t$	$\sinh k\beta T$	$\frac{z \sinh \beta T}{z^2 - 2z \cosh \beta T + 1}$
17	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$\cosh \beta t$	$\cosh k\beta T$	$\frac{z^2 - z \cosh \beta T}{z^2 - 2z \cosh \beta T + 1}$
18	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$c^k \cos k\beta T$ $c = e^{-\alpha T}$	$\frac{z^2 - cz \cos \beta T}{z^2 - 2cz \cos \beta T + c^2}$
19	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \frac{\pi t}{T}$	$(-c^k)$ $c = e^{-\alpha T}$	$\frac{z}{z - c}$
20	$\frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$c^k \sin k\beta T$ $c = e^{-\alpha T}$	$\frac{cz \sin \beta T}{z^2 - 2cz \cos \beta T + c^2}$

Tab. Oryginały i transformaty funkcji dyskretnych