Zarządzanie wiedzą

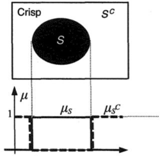
Wykład 11
Reprezentacja niepewności w systemach inteligentnych
Logika rozmyta

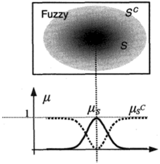
Joanna Kołodziejczyk

20 maj 2011

Plan wykładu

Logika klasyczna kontra logika rozmyta

<table>
<tr><th>Logika klasyczna</th><th>Logika rozmyta[1]</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Zbiory ostre (przykłady):
$S_1 = \{wilk, owca, pies\}$
$S_2 = \{x \in N | x < 15\}$</td><td>Zbiór rozmyty (przykład):
$S = \{(x, \mu_S(x)) | \mu_S(x) = (1 + (x - 12)^2)^{-1}\}$</td></tr>
<tr><td>funkcja charakterystyczna
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in S; \\ 0 & \text{if } x \notin S. \end{cases}$$</td><td>funkcja przynależności
$$\mu_S : X \to [0, 1]$$</td></tr>
</table>

[1] Rysunki z V. Kecman „Learning and Soft Computing ...”

Definicja zbioru rozmytego

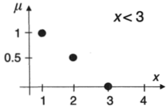
Zbiór rozmyty

Zbiór rozmyty A w przestrzeni X jest to zbiór par takich, że

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}; \mu_A : X \to [0, 1],$$

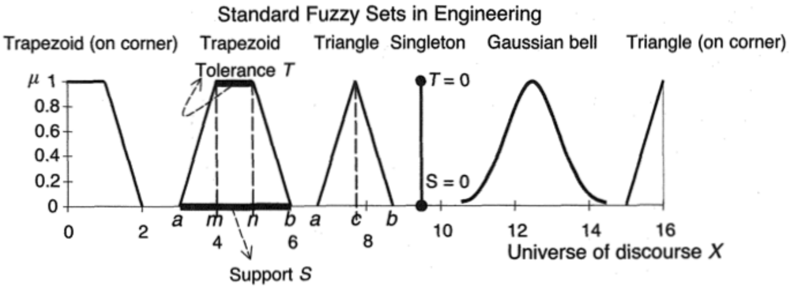
gdzie μ_A to funkcja przynależności określająca dla każdego $x \in X$ wartość przynależności tego elementu $\mu_A(x) \in [0, 1]$ do zbioru rozmytego A i $A \subseteq X$.

Inna notacja zbioru rozmytego: $S = \{(1/1), (0.5/2), (0/3)\}$



Typy funkcji przynależności/rodzaje zbiorów rozmytych

Funkcje przynależności mogą mieć różne kształty. Wybór kształtu dla pewnego zbioru rozmytego (atrybutu/wartości lingwistycznej) jest subiektywne i zależy od problemu. [2]



[2] Rysunek z V. Kecman „Learning and Soft Computing ...”

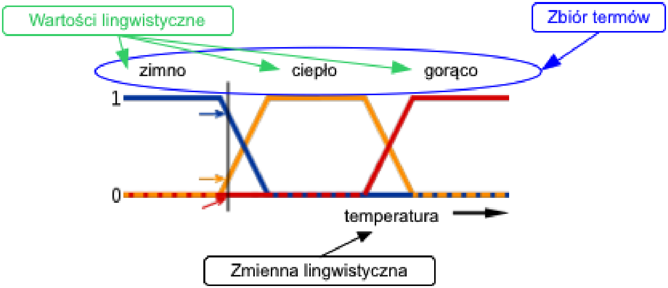
Funkcja trójkątna i trapezoida

Funkcja trójkątna[3]	Trapezoida
$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a; \\ \frac{x-a}{c-a} & \text{if } x \in [a, c]; \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{if } x \in [c, b]; \\ 1 & \text{if } x > b; \end{cases}$	$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a; \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{if } x \in [a, m]; \\ 1 & \text{if } x \in [m, n]; \\ \frac{b-x}{b-n} & \text{if } x \in [n, b]; \\ 0 & \text{if } x > b. \end{cases}$

[3] Oznaczenia: rysunek z poprzepdniego slajdu

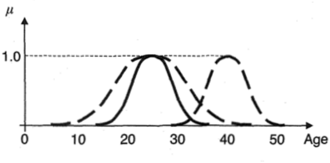
Zmienna lingwistyczna

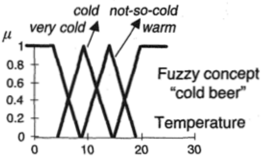
W przykładzie istnieją trzy zbiory rozmyte: zimno, ciepło, gorąco. Każdy ze zbiorów ma niezależną funkcję przynależności określającą stopień prawdy (oś y) z jakim dana wartość ostra temperatury przynależy do danego zbioru.



Przykład modelowania nieprecyzyjnych konceptów

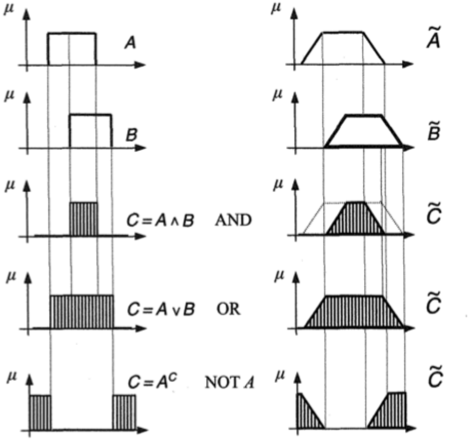
Młody człowiek	Zimne piwo
Określenie nieprecyzyjne i subiektywne. Model rozmyty zależy od jego autora. Rys. trzy różne modele od różnych ekspertów.	Określenie „Poproszę zimne piwo” będzie różnie interpretowane w różnych regionach. Koncept jest nieprecyzyjny i bardzo subiektywny.[4]





[4] Rysunki z V. Kecman „Learning and Soft Computing ...”

Operacje przecięcia i sumy zbiorów (klasyczny/rozmyty)



[5]

---

[5] Rysunek z V. Kecman „Learning and Soft Computing ...”

Operatory na zbiorach rozmytych

Przedstawione operatory (z poprzedniego slajdu) nie są jedynymi, za to najczęściej stosowanymi w naukach inżynierskich operatorami przecięcia (MIN) i sumy (MAX).

Istnieją różne definicje na operacje na zbiorach rozmytych. W logice rozmytej przecięcie zbiorów jest nazywane T-normą, a unia T-konormą lub S-normą.

Różne T-normy i S-normy

AND *T*-Norm $T(\mu_A(x), \mu_B(x))$	OR *S*-Norm $S(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Minimum $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$	Maximum $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Algebraic product $\mu_A(x)\mu_B(x)$	Algebraic sum $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$
Drastic product $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1$ 0 otherwise	Drastic sum $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$ 1 otherwise
Lukasiewicz AND (Bounded Difference) $\mathrm{MAX}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$	Lukasiewicz OR (Bounded Sum) $\mathrm{MIN}(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$
Einstein product $\mu_A(x)\mu_B(x)/(2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)))$	Einstein sum $(\mu_A(x) + \mu_B(x))/(1 + \mu_A(x)\mu_B(x))$
Hamacher product $\mu_A(x)\mu_B(x)/(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))$	Hamacher sum $(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\mu_B(x))/(1 - \mu_A(x)\mu_B(x))$
Yager operator $1 - \mathrm{MIN}(1, ((1 - \mu_A(x))^b + (1 - \mu_B(x)^b)^{1/b}))$	Yager operator $\mathrm{MIN}(1, (\mu_A(x)^b + \mu_B(x)^b)^{1/b})$

[6]

[6] Tabela z V. Kecman „Learning and Soft Computing ...”

Plan wykładu

FIS — Fuzzy Inference Systems

Definicja

System wnioskowania rozmytego (FIS), to sposób odwzorowania przestrzeni wejściowej w przestrzeń wyjścia z zastosowaniem logiki rozmytej. FIS stara się sformalizować proces rozumowania ludzkiego z wykorzystaniem języka naturalnego za pomocą logiki rozmytej (czyli poprzez budowę rozmytych reguł IF-THEN).

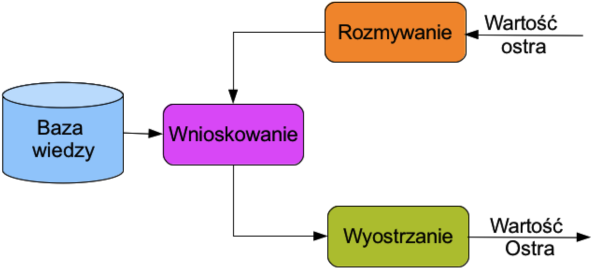
FIS są wykorzystywane do rozwiązywania problemów decyzyjnych, tzn. podejmują decyzję, by zadziałać odpowiednio do niej.

Struktura FIS

System wnioskowania rozmytego składa się z czterech modułów:

1. Moduł rozmywania (fuzzification): przekształca wejścia systemu, którymi są ostre wartości (liczbowe) do rozmytych. Odbywa się to poprzez zastosowanie funkcji przynależności.
2. Baza wiedzy: przechowuje zbiór reguł IF-THEN dostarczonych przez ekspertów, czyli sformalizowaną wiedzę na temat rozwiązywanego problemu.
3. Mechanizm wnioskowania: symuluje ludzkie rozumowanie poprzez proces wnioskowania rozmytego na wejściach zgodnie z logiką zapisaną w regułach IF-THEN.
4. Moduł wyostrzania (defuzzification): przekształca zbiór rozmyty powstały w wyniku wnioskowania na wartości ostre.

Schemat FIS



W rzadkich przypadkach do systemu może zostać na wejściu przekazana wartość rozmyta, wówczas blok rozmywania jest pomijany.
Jeżeli po procesie wnioskowania otrzymamy zbiór rozmyty z decyzją a system ekspertowy generuje decyzje lingwistyczne, to blok wyostrzania jest pomijany.

Po co stosować FIS?

- Logika rozmyta nie rozwiązuje nowych problemów. Korzysta z nowych metod do rozwiązywania codziennych problemów.
- Pojęcia matematyczne zastosowane w rozumowania rozmytym są bardzo proste.
- Logika rozmyta jest elastyczna: łatwo modyfikować FIS tylko przez dodawanie lub usuwanie reguł. Nie ma potrzeby tworzenia nowego FIS od podstaw dla nowego problemu.
- Logika rozmyta pozwala pracować z nieprecyzyjnymi danymi (nie rozwiązuje problemu wnioskowania z niepewnością) radzi sobie z elementami zbiorów rozmytych, tj. wartościami przynależności. Na przykład, logika rozmyta działa dla zdań „On jest wysoki w stopniu 0.8" zamiast „On ma 180cm wzrostu"'.
- Logika rozmyta jest zbudowana na wiedzy ekspertów: opiera się ona na know-how tych, którzy rozumieją jak dany system ma działać.
- Logika rozmyta może być mieszana z innymi metodami wnioskowania.

Kiedy powinno się stosować logikę rozmytą?

Motywacja

Logika rozmyta jest opartat na języku naturalnym. Jest to zakodowana postać zdrowego rozsądku. Tak więc, nie powinniśmy jej używać, gdy nasz zdrowy rozsądek mówi nam, aby tego nie robić. [a]

[a] cytat z eMathTeacher: Mamdani's Fuzzy Inference Method

Reguły rozmyte IF-THEN

Reguły rozmyte IF-THEN

IF x is A THEN y is B
IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND ... THEN y is B
IF x_1 is A_1 OR x_2 is A_2 OR ... THEN y is B

- A i B są to wartości lingwistyczne zdefiniowane jako zbiory rozmyte z uniwersum X i Y.
- x jest zmienną wejściową i y jest zmienną wyjściową.

Przykład

Reguła w postaci lingwistycznej:
Jeżeli obsługa w restauracji jest wyjątkowo dobra, nawet jeśli żywność nie jest doskonała, napiwek będzie hojny.

i odpowiednia dla niej reguła rozmyta:
IF service is excellent OR food is medium THEN tip is generous.

Interpretacja reguły rozmytej

- Znaczenie *is* jest różne w przesłance i w konsekwencji. Przesłanka zwraca wartość między 0 a 1, a konsekwencja przypisuje rozmyty zbiór B do zmiennej y i przynależność z przesłanki.
- Wejście do reguły jest wartością ostrą określoną dla zmiennej wejściowej x (wartość ta należy do uniwersum).
- Wyjście z reguły jest zbiorem rozmytym przypisanym do zmiennej y.
- Reguła jest wykonywana przez zastosowanie rozmytego operatora implikacji, którego argumentami są zbiory rozmyte z przesłanki. Implikacja tworzy wynik w zbiorze rozmytym.

Metoda wnioskowania Mamdaniego

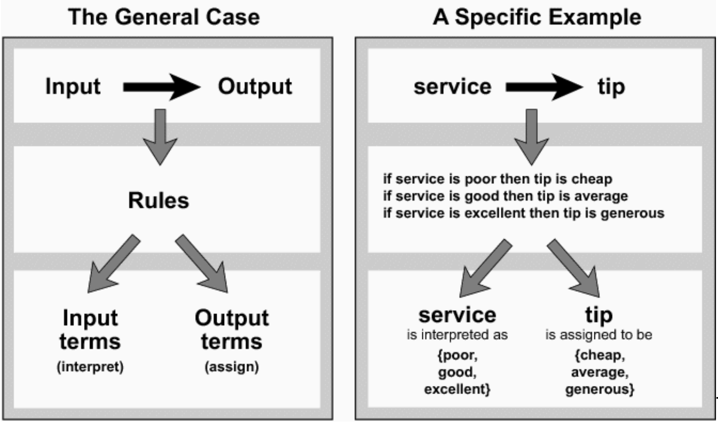
Metoda wnioskowania Mamdaniego jest jedną z najczęściej stosowanych ze względu na swoją prostotę.

Aby zrozumieć jak działa to wnioskowanie posłużymy się przykładem rozważanym w przewodniku do Matlaba a rozwiązującym problem:

Problem napiwku

Otrzymujemy ocenę jakości serwisu i jedzenia w restauracji daną jako liczba od 0 do 10. Jaki powinnien być napiwek? (Zakłada się napiwek w przedziale 0 do 25% wydanej kwoty.)

Problem napiwku

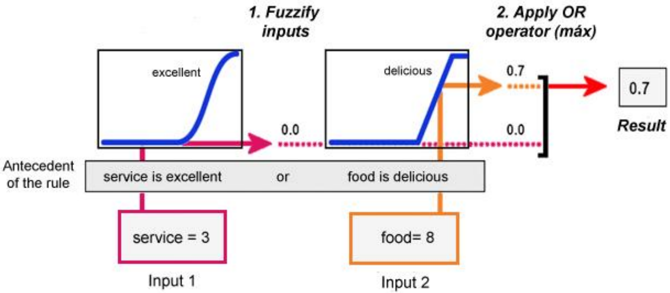


[7]

[7] http://www.mathworks.com/help/toolbox/fuzzy/fp59888.html

Krok 1: Ocena przesłanki w każdej regule

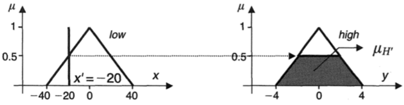
Biorąc pod uwagę wejścia (wartości ostre) otrzymujemy ich wartości przynależności do odpowiednich zbiorów rozmytych wykorzystywanych w regułach. Proces ten nazywany jest rozmywaniem. Jeżeli przesłanka reguły ma więcej niż jedną część, stosowany jest rozmyty operator (t-normy lub s-normy) zależnie od złożenia AND lub OR. Przykład:



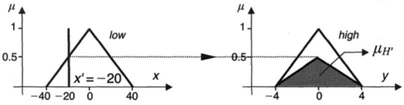
Krok 2: Uzyskanie wniosku z każdej reguły

Na podstawie uzyskanej wartość przesłanki (z kroku 1) uzyskuje się rozmytą konsekwencję dla każdej z reguł przez zastosowanie operatora implikacji.
Dwie najczęściej stosowane implikacje to:

- minimum, który w konsekwencji obcina funkcję przynależności do wartości 1
- produkt (iloczyn algebraiczny), który skaluje wartość przynależności.

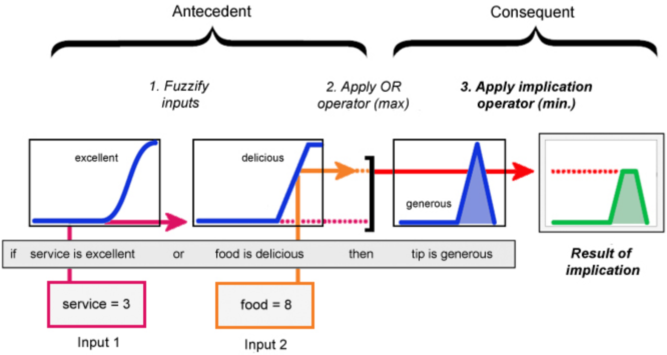


MIN



PROD

Krok 2: Uzyskanie wniosku z każdej reguły



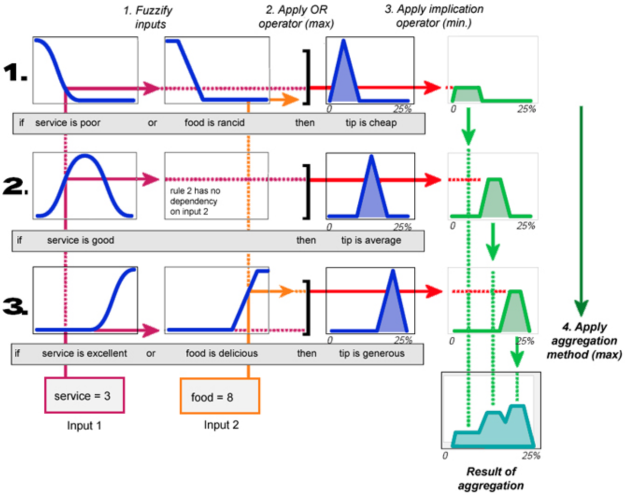
Krok 3: Agregacja reguł (wniosków)

W tym kroku łączy się w jeden zbiór rozmyty za pomocą rozmytych operatorów agregacji wyjścia otrzymane dla każdej reguły w kroku 2.

Niektóre z najczęściej używanych operatorów agregacji to:

- maksimum
- suma odcięta
- suma probabilistyczna.

Krok 3: Agregacja reguł (wniosków)



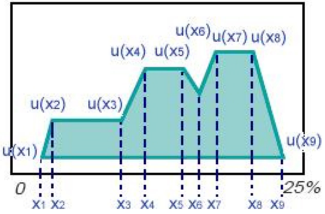
Krok 4: Wyostrzanie

Kiedy staramy się rozwiązać problem decyzyjny najczęściej chcemy uzyskać ostrą wartość, a nie rozmytą. Na przykład, nie chcemy, by system dał podpowiedź „daj hojny napiwek". Chcemy wiedzieć, ile ten napiwek ma wynosić.

Tak więc, musimy przekształcić rozmyty zbiór wyjściowy. Jedną z najbardziej popularnych metod wyostrzania jest metoda środka ciężkości, która oblicza środek obszaru pod zbiorem rozmytym otrzymanym w kroku 3.

Krok 4: Wyostrzanie metodą środka ciężkości

5. Defuzzify the aggregate output (centroid)



$$g = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i \cdot u(x_i)}{\sum_{i=1}^{9} u(x_i)} = 16{,}7$$

tip= 16,7%

Result of defuzzification

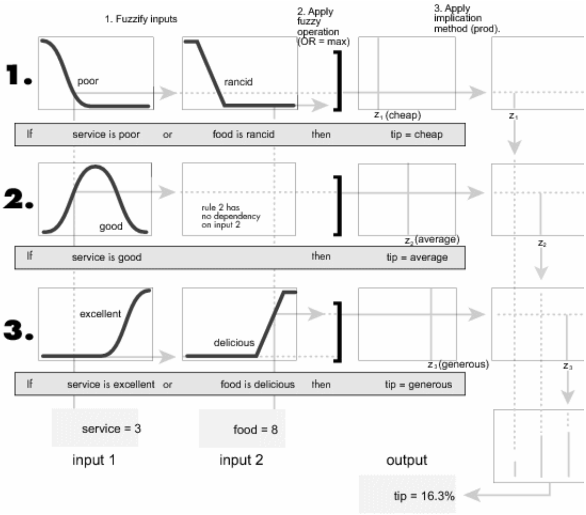
Podsumowanie przykładu

Metoda Mamdaniego jest przydatna, gdy liczba zmiennych jest mała. W przeciwnym razie napotka się następujące trudności:

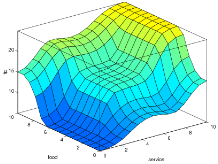
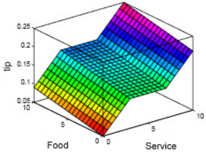
- Liczba reguł rośnie wykładniczo wraz z liczbą zmiennych w przesłance.
- Im więcej reguł, tym trudniej ocenić ich dopasowanie do problemu.
- Jeżeli liczba zmiennych w przesłance jest zbyt duża, trudno będzie zrozumieć relacje między przesłankami i konsekwencjami.

Istnieją inne metody wnioskowania takie jak metoda Sugeno, która inaczej oblicza implikację.

Metoda Sugeno dla napiwku



Płaszczyzna wyjścia

<table>
<tr><th>Metoda Sugeno</th><th>Podejście nierozmyte</th></tr>
<tr><td>
</td><td>


```
servRatio=0.8;

if service<3,
   tip=((0.1/3)*service+0.05)*servRatio+
      + (1-servRatio)*(0.2/10*food+0.05);
elseif service<7,
   tip=(0.15)*servRatio+
      + (1-servRatio)*(0.2/10*food+0.05);
else
   tip=((0.1/3)*(service-7)+0.15)*servRatio+
      + (1-servRatio)*(0.2/10*food+0.05);

end
```
</td></tr>
</table>