Elementy Sztucznej Inteligencji

Wnioskowanie statystyczne i oparte na współczynnikach wiarygodności

Plan wykładu

- Niepewność
- Wnioskowanie statystyczne:
  - Wprowadzenie teoretyczne
  - Wnioskowanie probabilistyczne
  - Przykłady
- Wnioskowanie ze współczynnikami wiarygodności
  - Wprowadzenie, definicje.
  - Przykład
- Porównanie technik

Typy niepewności

- Niepewność wiedzy podstawowej:
  np.. pewne przyczyny chorób są nieznane i nie są prezentowane w podstawach wiedzy medycznej.
- Niepewność działań:
  np.. działania można przedstawić jako relatywnie krótką listę warunków początkowych. W rzeczywistości liczba faktów do uwzględnienia jest przytłaczająco duża.
- Niepewność postrzegania:
  np.. czujniki agenta nie zwracają dokładnej informacji o świecie i agent nigdy nie wie wszystkiego o swoim położeniu (szum).

Przykład

Przykład niepewności działania:

By rano odjechać samochodem:

• Samochód nie mógł być w nocy ukradziony.
• Opony nie mogą być dziurawe.
• Musi być benzyna w baku.
• Akumulator musi być sprawny.
• Zapłon musi działać.
• Kluczyk do stacyjki nie mogły zostać zgubione.
• Ciężarówka nie może zablokować wyjazdu.
• Nie można nagle stracić wzroku.

itd....

Metody radzenia sobie z wiedzą niepewną

- Wnioskowanie niemonotoniczne
  - np.. Zakładam, że samochód nie ma dziury w oponie
  - problem: jakie założenia są poprawne, jak radzić sobie ze sprzecznościami powstałymi w wyniki wprowadzenia nowego założenia.
- Zastosowanie współczynników wiarygodności
  - np. reguły: zraszacz → mokra trawa (cf = 0.99)
  - problemy: problemy ze składaniem i śledzeniem zależności.
- Prawdopodobieństwo
  - wykorzystuje stopień przekonania (degree of belief)
  - działa dla systemów z dostępnymi dowodami
- Logika rozmyta – opisuje stopień prawdziwości a nie niepewności

Prawdopodobieństwo

- Prawdopodobieństwo jest subiektywne:
  - prawdopodobieństwa określają proporcje wynikające z indywidualnej oceny agenta.
  - np.. P(dojadę na dworzec$_{15min}$|nie stwierdzono wypadku) = 0,06
- Nie formułuje twierdzeń o świecie (prawdopodobnych tendencji), jednak może się uczyć z własnych doświadczeń o podobnych sytuacjach.
- Przedstawione prawdopodobieństwa nie określają stopnia prawdziwości reguły (która może być albo prawdziwa, albo fałszywa), ale stopień wiary (oczekiwana częstość) w jej wystąpienie.
- Prawdopodobieństwa hipotez (wniosków) zmieniają się wraz nowymi dowodami
  - np.. P(dojadę na dworzec$_{15min}$|nie stwierdzono wypadku, 17:00) = 0,16

Podejmowanie decyzji w niepewności

- Zakładamy, że jesteśmy przekonani o
  - $P(A_{25}$ gets me there on time | …) = 0.04
  - $P(A_{90}$ gets me there on time | …) = 0.70
  - $P(A_{120}$ gets me there on time | …) = 0.95
  - $P(A_{1440}$ gets me there on time | …) = 0.9999
- Jaką akcję podjąć?
- Należy rozważyć czy chcemy się spóźnić i jak długo chcemy czekać.
- Teoria użyteczności jest stosowana do określenia preferowanych wniosków
- Teoria decyzji = teoria użyteczności + teoria prawdopodobieństwa.

Podstawy teorii prawdopodobieństwa

- Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia jest odsetkiem jego wystąpień.
- Miara prawdopodobieństwa określana jest wartościami z zakresu 0 (zdarzenie niemożliwe) do 1 (zdarzenie pewne).
- Dla każdego zdarzenia można podać dwie miary:
  - prawdopodobieństwo powodzenia:
    P(powodzenie) =
    = liczba powodzeń/liczba możliwych wyników (prób)
  - prawdopodobieństwo porażki:
    P(porażka) =
    = liczba porażek/ liczba możliwych wyników (prób)
  - P(powodzenie) + P(porażka) = 1
- Zdarzenie A jest dowolnym podzbiorem Ω (przestrzeń prób)
  $P(A) = \Sigma_{\omega\in A}P(\omega)$
  - P(rzut kością < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = ½

Zmienne losowe

- Zmienna losowa jest funkcją z próbki w pewien zakres np.. liczb rzeczywistych czy binarnych,.
  - np.. Odd(1)=true.
- P określa rozkład prawdopodobieństwa dla każdej zmiennej losowej X:
  - $P(X = x_i) = \Sigma_{\omega:X(\omega)=x_i} P(\omega)$
  - np., P(Odd=true) = P(1) + P(3) + P(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2

Składnia

- Boolowska zmienne losowe
  - np, cavity (Czy mam ubytek?)
  - cavity = true jest zdarzeniem, zapisana również cavity
- Dyskretne zmienne losowe
  - np., Weather może być jedną a {sunny; rain; cloudy; snow}
  - Weather =rain jest zdarzeniem
- Wartości muszą być wyczerpujące i wzajemnie wykluczające się.
- Ciągła zmienna losowa (ograniczona i nieograniczona)
  - np, Temp=21,6; możliwe inne przedstawienie np., Temp < 22,00.

Zdarzenia niezależne i zależne

- Zdarzenie niezależne - zdarzenie wzajemnie wykluczające się, tj. nie mogą wystąpić równolegle np.. wyrzucenie 1 i 6 w jednym rzucie kostką są niezależne
- Zdarzenia zależne:
  - wydarzenia występujące równolegle,
  - takie zdarzenia wpływają wzajemnie na prawdopodobieństwa wystąpienia,
  - np.. jeżeli wiemy, że przy rzucie kostką na pewno nie wystąpi 1 to uzyskanie 6 przy pojedynczym rzucie:

$$p = \frac{s}{s+f} = \frac{1}{1+(5-1)} = 0.2$$

Składnia

- Zdarzenie elementarne: Pełna specyfikacja stanu świata niepewnego
  - np, jeżeli „świat” zawiera tylko boolowskie zmienne losowe *cavity* i *toothache*, to istnieją 4 odrębne zdarzenia elementarne:

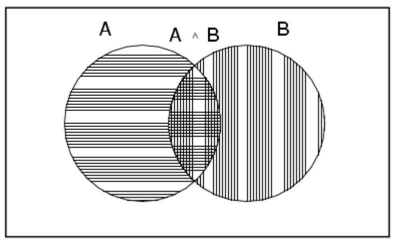
    cavity = false $\wedge$ *toothache = false*
    cavity = false $\wedge$ *toothache = true*
    cavity = true $\wedge$ *toothache = false*
    cavity = true $\wedge$ *toothache = true*

- Zdarzenia elementarne są wzajemnie wykluczające się i wyczerpujące.

Aksjomaty prawdopodobieństwa

➔ Dla dowolnych zdarzeń *A, B*

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- P(*true*) = 1 i P(*false*) = 0
- $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$



Prawdopodobieństwo a priori

➔ Prawdopodobieństwo a priori zdarzeń
np, P(*cavity* = true) = 0.2 and P(*Weather* = sunny) = 0.72
odnosi się do miary przekonania a priori bez pojawienia się nowych zdarzeń (dowodów). Żadne obserwacje mogące mieć wpływ na p nie zostały uwzględnione.

➔ Rozkład prawdopodobieństwa daje wartości dla wszystkich możliwych zdarzeń:
P(*Weather*) = <0.72,0.1,0.08,0.1> (znormalizowane, tj., P sumuje się do 1)

➔ Łączny rozkład prawdopodobieństwa dla zbioru zmiennych losowych określa prawdopodobieństwa każdego zdarzenia elementarnego.
P(*Weather,Cavity*) = macierz 4 × 2:

Weather =	sunny	rainy	cloudy	snow
Cavity = true	0.144	0.02	0.016	0.02
Cavity = false	0.576	0.08	0.064	0.08

➔ Na każde zapytanie z dziedziny można uzyskać odpowiedź na podstawie łącznego rozkładu prawdopodobieństwa dlatego, że każde zdarzenie jest sumą zdarzeń elementarnych
np. P(*Cavity*) = 0.144 + 0.02 + 0.016 + 0.02 = 0.2

Prawdopodobieństwo warunkowe

- Prawdopodobieństwo warunkowe lub a posteriori
  np., P(*Cavity* | T*oothache*) = 0.8
  tj., Wszystko o czym wiem to *toothache*
- Notacja rozkładu warunkowego:
  - **P**(*Cavity* | *Toothache*) dwuelementowy wektor dwuelementowych wektorów
- Jeżeli wiemy więcej, np., dane jest *cavity*, to mamy
  P(*cavity* | *toothache,cavity*) = 1
- Nowy dowód może być nieznaczący, zezwala na uproszczenia, np,
  P(*cavity* | *toothache, sunny*) = P(*cavity* | *toothache*) = 0.8
- Takie wnioskowanie poparte jest przez teorię prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo warunkowe

- Prawdopodobieństwo warunkowe (wzór 1.1):

$$p(a|b) = \frac{p(a \wedge b)}{p(b)}, p(b) > 0$$

- odpowiednio (1.2):

$$p(b|a) = \frac{p(b \wedge a)}{p(a)}, p(a) > 0$$

Prawdopodobieństwo łączne

- Ze wzoru (1.2) prawdopodobieństwo łączne (1.3):

$$p(b \wedge a) = p(b|a)\,p(a)$$

- Główna wersja zachowana dla całego rozkładu,np., **P**(*Weather,Cavity*) = **P**(*Weather* | *Cavity*) **P**(*Cavity*)
- Prawdopodobieństwo łączne jest przechodnie (1.4):

$$p(b \wedge a) = p(a \wedge b)$$

Wyprowadzenie reguły Bayes'a

- Dany jest wzór na prawdopodobieństwo warunkowe: $p(a|b) = \dfrac{p(a \wedge b)}{p(b)}, \; p(b) > 0$
- Podstawiając ze wzoru (1.3) prawdopodobieństwo łączne i korzystając z własności (1.4) uzyskujemy (1.5):

$$p(a|b) = \frac{p(b\,|\,a)\,p(a)}{p(b)}$$

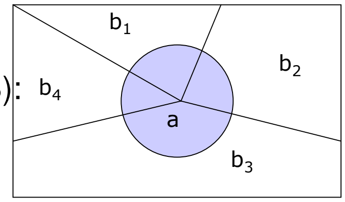
Rozpatrywanie wielu zdarzeń

- a zależy od zdarzeń $b_1,\dots b_n$ niezależnych, stąd (1.6):

$$\sum_{i=1}^{n} p(a \wedge b_i) = \sum_{i=1}^{n} p(a | \wedge b_i)\, p(b_i)$$

- Jeżeli *n* jest pełną listą zdarzeń warunkowych, to (1.7):

$$\sum_{i=1}^{n} p(a \wedge b_i) = p(a)$$



- stąd, z (1.6) i z (1.7) wynika (1.8):

$$p(a) = \sum_{i=1}^{n} p(a | b_i)\, p(b_i)$$

Reguła Bayesa dla dwóch zdarzeń

- Jeżeli badamy wystąpienie zdarzenia b zależnego od zmiennej losowej boolowskiej a, która może mieć dwie wartości to wzór(1.8) przybiera formę (1.9):

$$p(b) = p(b|a)\, p(a) + p(b|\neg a)\, p(\neg a),$$

- Korzystając z (1.9) reguła Bayesa ma postać (1.10):

$$p(a|b) = \frac{p(b|a)\, p(a)}{p(b|a)\, p(a) + p(b|\neg a)\, p(\neg a)},$$

Wnioskowanie z zastosowaniem reguły Bayesa

- Reguły reprezentowane są w formie:
  IF D(owód) jest TRUE
  THEN H(ipoteza) jest TRUE (z prawdopodobieństwem p)
- D to dowód na wystąpienie zdarzenia H, zatem reguła Bayes'a (z 1.10):

$$p(H \mid D) = \frac{p(D|H)\,p(H)}{p(D|H)\,p(H) + p(D|\neg H)\,p(\neg H)},$$

- gdzie:
  - p(H) - dane prawdopodobieństwo, że hipoteza H jest TRUE,
  - p(D|H) - hipoteza H jest TRUE pod wpływem dowodu D,
  - p(¬H) – prawdopodobieństwo, gdy hipoteza H jest FALSE,
  - p(D| ¬ H) - prawdopodobieństwo znalezienia dowodu D, gdy hipoteza H jest FALSE.

Jakie dane trzeba znać?

- p(H) musi być dane zanim jakikolwiek dowód D zostanie przedstawiony.
- Ponadto dane musi być:
  - prawdopodobieństwo, że hipoteza jest TRUE to zaobserwowano dowód D, czyli: p(D|H);
  - oraz prawdopodobieństwo wystąpienia D, gdy hipoteza była FALSE: p(D| ¬H).
- Dane dostarczane są przez ekspertów, lub wynikają ze zgromadzonych danych i obliczeń statystycznych.

Wiele hipotez dla jednego dowodu

- Hipotezy $H_1,\ldots,H_m$ muszą być wzajemnie wykluczające się, wówczas (1.11):

$$p(H_i|D) = \frac{p(D|H_i)\,p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(D|H_k)\,p(H_k)},$$

Wiele hipotez i wiele dowodów

- Hipotezy $H_1,\ldots,H_m$ jak i dowody $D_1,\ldots,D_n$ muszą być wzajemnie wykluczające się (niezależne). Wówczas (1.12):

$$p(H_i|D_1 D_2 \ldots D_n) = \frac{p(D_1 D_2 \ldots D_n|H_i)\,p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(D_1 D_2 \ldots D_n|H_k)\,p(H_k)},$$

- Upraszczając, ze względu na niemożliwą do uzyskania informację o prawdopodobieństwie kombinacji wszystkich dowodów dla danej hipotezy uzyskuje się zależność(1.13):

$$p(H_i|D_1 D_2 \ldots D_n) = \frac{p(D_1|H_i)\,p(D_2|H_i)\ldots p(D_n|H_i)\,p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(D_1|H_k)\,p(D_2|H_k)\ldots p(D_n|H_k)\,p(H_k)},$$

Prosty przykład oceny degree of belief

- Dane są przez eksperta następujące wartości prawdopodobieństw np.. (H1=grypa, H2= alergia, H3=przeziębienie) (D1 = katar, D2 = gorączka, D3 = ból głowy)

prawdopodobieństwo	Hipotezy i=1	i=2	i=3
p(Hi)	0,4	0,35	0,25
p(D1|Hi)	0,3	0,8	0,5
p(D2|Hi)	0,9	0	0,7
p(D3|Hi)	0,6	0,7	0,9

Został zaobserwowany dowód D3

- Jak długo nie ma żadnych dodatkowych informacji wiemy, że H1 może pojawić się z prawdopodobieństwem 0.4, H2 z 0.35, a H3 z 0.25.
- Pojawia się jednak dowód D3, co dzieje się z przekonaniami o hipotezach H1, H2 i H3?
- Korzystając z zależności wiele hipotez 1 dowód (1.11) obliczamy:

Jak zmienia się H1, H2 i H3

$$p(H_1|D_3) = \frac{0,6\times0,4}{0,6\times0,4+0,7\times0,35+0,9\times0,25} = 0,34$$

$$p(H_2|D_3) = \frac{0,7\times0,35}{0,6\times0,4+0,7\times0,35+0,9\times0,25} = 0,35$$

$$p(H_3|D_3) = \frac{0,9\times0,25}{0,6\times0,4+0,7\times0,35+0,9\times0,25} = 0,32$$

Wnioski

➔ Poprzez przedstawienie dowodu D3
- przekonanie o hipotezie H1 zmalało (0.4 do 0.34),
- przekonanie o H2 prawie zrównało się z H1 (0.35), ale się nie zmieniło
- przekonanie o H3 wzrosło (0.25 do 0.32).

Został zaobserwowany dowód D1

- Po zaobserwowaniu dowodu D3 zaobserwowano kolejny dowód D1.
- Należy zatem uwzględnić sytuację, gdy operujemy na wielu hipotezach i wielu dowodach.
- Do wyznaczania nowego przekonania o hipotezach skorzystamy ze wzoru (1. 13).

Jak zmienia się H1, H2 i H3

$$p(H_1|D_1D_3)=\frac{0,3\times0,6\times0,4}{0,3\times0,6\times0,4+0,8\times0,7\times0,35+0,5\times0,9\times0,25}=0,19$$

$$p(H_2|D_1D_3)=\frac{0,8\times0,7\times0,35}{0,3\times0,6\times0,4+0,8\times0,7\times0,35+0,5\times0,9\times0,25}=0,52$$

$$p(H_3|D_1D_3)=\frac{0,5\times0,9\times0,25}{0,3\times0,6\times0,4+0,8\times0,7\times0,35+0,5\times0,9\times0,25}=0,30$$

Wnioski

- Poprzez przedstawienie dowodu D1 i D3
  - przekonanie o hipotezie H1 poważnie zmalało (0.34 do 0.19),
  - dla H2 prawdopodobieństwo wzrosło (0.35 do 0.52),
  - a H3 obniżyło się (0.32 do 0.30).

Został zaobserwowany dowód D2

- Analogicznie do sytuacji poprzednich przedstawiono kolejny dowód D2.
- Będzie on miał wpływ na zmianę przekonania o wystąpieniu hipotez H1, H2 i H3.

$$p(H_1 | D_1 D_2 D_3) = \frac{0,3 \times 0,9 \times 0,6 \times 0,4}{0,3 \times 0,9 \times 0,6 \times 0,4 + 0,8 \times 0 \times 0,7 \times 0,35 + 0,5 \times 0,7 \times 0,9 \times 0,25} = 0,45$$

$$p(H_2 | D_1 D_2 D_3) = \frac{0,8 \times 0 \times 0,7 \times 0,35}{0,3 \times 0,9 \times 0,6 \times 0,4 + 0,8 \times 0 \times 0,7 \times 0,35 + 0,5 \times 0,7 \times 0,9 \times 0,25} = 0$$

$$p(H_3 | D_1 D_2 D_3) = \frac{0,5 \times 0,7 \times 0,9 \times 0,25}{0,3 \times 0,9 \times 0,6 \times 0,4 + 0,8 \times 0 \times 0,7 \times 0,35 + 0,5 \times 0,7 \times 0,9 \times 0,25} = 0,55$$

Wnioski

- ➔ Poprzez przedstawienie dowodu D2 sytuacja diametralnie się zmienia:
  - przekonanie o hipotezie H1 wzrasta (0.19 do 0.45),
  - hipoteza H2 jest nieprawdopodobna (0),
  - a H3 znacznie wzrosło (0.30 do 0.55).
- ➔ Zatem dla dowodów D1, D2, D3 najbardziej prawdopodobna jest hipoteza H3.

L i O

- ➔ W niektórych zastosowaniach przekształca się wzór Bayes'a (1.11) stosując dwa współczynniki:
  - L (likelihood ratio) – wskaźnik wiarygodności,
  - O (odds ratio) – iloraz szans.
- ➔ Dzieląc wzór (1.11) przez odpowiednią formę dla hipotezy komplementarnej uzyskujemy (1.14):

$$\frac{p(H|D)}{p(\neg H|D)} = \frac{p(D|H) \times p(H)}{p(D|\neg H) \times p(\neg H)}$$

Przekonanie o hipotezie H w nowym ujęciu

- Iloraz szans to (1.15): $O(H) = \frac{p(H)}{p(\neg H)} = \frac{p(H)}{1 - p(H)}$
- a wskaźnik wiarygodności (1.16): $L(D \mid H) = \frac{p(D \mid H)}{p(D \mid \neg H)}$
- Zatem (1.17): $O(H \mid D) = \frac{p(H \mid D)}{p(\neg H \mid D)}$
- A z (1.14) podstawiając (1.15), (1.16) i (1.17) wynika (1.18):

$$O(H \mid D) = L(D \mid H) O(H)$$

Przykład

- W środku nocy budzi nas alarm informujący o włamaniu.
- Jaki jest stopień przekonania o włamaniu?
- Istnieje 95% szansy, że włamanie włączy alarm: p(alarm|włamanie)=0.95.
- W oparciu o wcześniejsze fałszywe alarmy obliczono, że jest niewielka szansa (1%), że alarm włączył się bez przyczyny: p(alarm|nie włamanie)=0,01.
- W oparciu o dane o przestępczości jest szansa 1 na 1000, że danej nocy do danego domu nastąpi włamanie: p(włamanie) = 10^{-4}

Czy jest włamanie?

- Korzystając z wzoru (1.18) uzyskujemy:

$$O(wlamanie \mid alarm) = L(alarm \mid wlamanie) O(wlamanie) =$$

$$\frac{0.95}{0.01}\frac{10^{-4}}{1-10^{-4}} = 0.0095$$

- Z zależności (1.19) wyprowadzonej z (1.15):

$$p(A) = \frac{O(A)}{1+O(A)}$$

- uzyskujemy:

$$p(wlamanie \mid alarm) = \frac{0.0095}{1+0.0095} = 0.00941$$

Wnioski

- Retrospektywne wsparcie dla hipotezy o włamaniu dawane przez dowód w postaci włączonego alarmu zostało wzmocnione ponad stukrotnie (0.0001 do 0.0094).

Prognozowanie pogody

- Zadanie: określić czy będzie, lub czy nie będzie padał deszcz następnego dnia.
- Z biura prognozowania zebrane są dane:
  - minimalna temperatura w ciągu dnia,
  - maksymalna temperatura w ciągu dnia,
  - opady w mm,
  - liczba godzin słonecznych,
  - aktualny stan: pada lub nie pada.
- System prognozowania poda z jakim prawdopodobieństwem będzie padało lub nie będzie padało dnia następnego.

Reguły główne

- Główne reguły z prawdopodobieństwem i wskaźnikami:
  1. IF dziś pada [LS=2,5 LN=0,6]
     THEN jutro pada {p=0,5}
  2. IF dziś nie pada [LS=1,6 LN=0,4]
     THEN jutro nie pada {p=0,5}

Podział L na LS i LN

- Wprowadzamy podział wskaźnika wiarygodności L na LS i LN, gdzie (1.19) i (1.20):

$$LS(D \mid H) = \frac{p(D \mid H)}{p(D \mid \neg H)} \qquad LN(D \mid H) = \frac{p(\neg D \mid H)}{p(\neg D \mid \neg H)}$$

- Współczynnik LS jest miarą ufności w hipotezę H, jeżeli przedstawiony został dowód D.
  - LS = p(dziś pada|jutro pada) / p(dziś pada|jutro nie pada)
- Współczynnik LN jest miarą pomniejszenia przekonania o hipotezie H, gdy brak dowodu D
  - LN = p(dziś nie pada|jutro pada) / p(dziś nie pada|jutro nie pada)
- LN nie może być wyprowadzony z LS i wartości te podawane są przez ekspertów lub z danych.

Określanie wartości LN i LS

- Aby je określić nie trzeba opierać się na prawdopodobieństwie warunkowym.
- Wartości podawane są niezależnie:
  - duże LS (>>1) silnie potwierdza hipotezę,
  - a niskie LN (0< LN <1) oznacza, że reguła silnie osłabia hipotezę, gdy nie ma dowodu D.
- Z LN i LS łatwo wyprowadzić prawdopodobieństwa warunkowe i zastosować regułę Bayes'a.
- W przykładzie:
  - LS=2,5 oznacza, że jeżeli dziś pada, to z dużym prawdopodobieństwem będzie padać jutro,
  - LN=0,6 oznacza, że istnieje szansa, że pomimo, że dziś nie pada to jutro będzie padać.

Iloraz szans dla LN i LS

- Rewidując wzór (1.18) z zastosowaniem (1.19) i (1.20) uzyskujemy:

$$O(H|D) = LS \times O(H),$$
$$O(H|\neg D) = LN \times O(H)$$

- Poszukiwane prawdopodobieństwa oblicza się zatem:

$$p(H|D) = \frac{O(H|D)}{1+O(H|D)},$$
$$p(H|\neg D) = \frac{O(H|\neg D)}{1+O(H|\neg D)}$$

Przykład: odpalenie reguły 1

- Dowód D: Dziś pada.
- Reguła 1 jest odpalana i prawdopodobieństwa są użyte do obliczenia szansy wystąpienia deszczu:

$$O(jutro\ pada) = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

- Dowód D zwiększa szansę na opad przez wskaźnik wiarygodności LS=2,5

$$O(jutro\ pada|dziś\ pada) = 2,5 \times 1 = 2,5$$
$$p(jutro\ pada|dziś\ pada) = \frac{2,5}{1+2,5} = 0,71$$

- Wniosek: Prawdopodobieństwo jutrzejszego opadu wzrasta z 0,5 do 0,71 poprzez przedstawienie dowodu D.

Przykład: odpalenie reguły 2

- Dowód D: Dziś pada.
- Reguła 2 jest odpalana i prawdopodobieństwa są użyte do obliczenia szansy, że jutro nie będzie padać:

$$O(jutro\ nie\ pada) = \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 1$$

- Dowód D wpływa hipotezę, że jutro nie będzie padało ze współczynnikiem LN=0,4

$$O(jutro\ nie\ pada \mid dziś\ pada) = 0{,}4 \times 1 = 0{,}4$$

$$p(jutro\ nie\ pada \mid dziś\ pada) = \frac{0{,}4}{1+0{,}4} = 0{,}29$$

- Wniosek: prawdopodobieństwo, że jutro nie będzie padać, gdy dziś pada jest 0,29, czyli zmniejszyło się z powodu zaistnienia D.

Przykład: D = Dziś nie pada.

- W analogiczny sposób oblicza się prawdopodobieństwa, że jutro nie będzie padać, lub będzie deszczowo, gdy dowód D mówi, że dziś nie pada.
- Wyniki dla obu reguł to:
  - 62% szans, że nie będzie padać, gdy dziś nie pada.
  - 38% szans, że będzie padało, gdy dziś nie padało.

Dodajemy kolejne reguły

- Powiększamy naszą bazę wiedzy na temat prognozowania pogody o inne parametry.
- Wskaźniki są uzyskiwane poprzez analizę danych zbieranych z lat poprzednich. Pewne zależności są widoczne i można je ująć w reguły, które uszczegółowią analizę i sprawią, że wnioskowanie będzie bardziej wiarygodne.

Zestaw reguł

1. IF dziś pada [LS=2,5 LN=0,6]
   THEN jutro pada {p=0,5}
2. IF dziś nie pada [LS=1,6 LN=0,4]
   THEN jutro nie pada {p=0,5}
3. IF dziś pada
   AND wilgotność jest niska [LS=10 LN=1]
   THEN jutro nie pada {p=0,5}

Zestaw reguł cd.

4. IF dziś pada
   AND wilgotność jest niska
   AND temperatura jest niska [LS=1,5 LN=1]
   THEN jutro nie pada {p=0,5}
5. IF dziś nie pada
   AND temperatura jest wysoka [LS=2 LN=0,9]
   THEN jutro pada {p=0,5}
6. IF dziś nie pada
   AND temperatura jest wysoka
   AND niebo jest pochmurne [LS=5 LN=1]
   THEN jutro pada {p=0,5}

Działanie systemu wnioskowania – dialog

- ➔ *Jaka jest dziś pogoda*?
- ➔ Odp: **PADA**
- ➔ Obliczenia (przedstawione na slajdach (41-42)):
  - na podstawie reguły 1:
    - p(jutro pada | dziś pada)=0,71
  - na podstawie reguły 2:
    - p(jutro nie pada |dziś pada)=0,29
- ➔ Wniosek: jutro: pada [0,71], nie pada [0,29]

Działanie systemu wnioskowania – dialog cd.

- *Jaka jest dziś wilgotność*?
- Odp: **NISKA**
- Obliczenia:
  - na podstawie reguły 3 (prawdopodobieństwo opadu pobrane z poprzedniego kroku (0,29)):

$$O(jutro\ nie\ pada) = \frac{0{,}29}{1-0{,}29} = 0{,}41$$

$$O(jutro\ nie\ pada | dzis\ pada \cap niska\ wilgotnosc) = 10 \cdot 0{,}41 = 4{,}1$$

$$p(jutro\ nie\ pada | dzis\ pada \cap niska\ wilgotnosc) = \frac{4{,}1}{1+4{,}1} = 0{,}81$$

- Wniosek: jutro: pada [0,71], nie pada [0,81]

Działanie systemu wnioskowania – dialog cd.

- *Jaka jest dziś temperatura*?
- Odp: **NISKA**
- Obliczenia:
  - na podstawie reguły 4 (LS): $O(jutro\ nie\ pada) = \frac{0{,}81}{1-0{,}81} = 4{,}26$

$$O(jutro\ nie\ pada | dzis\ pada \cap niska\ wilgotnosc \cap niska\ temp) = 1{,}5 \cdot 4{,}26 = 6{,}4$$

$$p(jutro\ nie\ pada | dzis\ pada \cap niska\ wilgotnosc \cap niska\ temp) = \frac{6{,}4}{1+6{,}4} = 0{,}86$$

  - na podstawie reguły 5 (LN): $O(jutro\ pada) = \frac{0{,}71}{1-0{,}71} = 2{,}45$

$$O(jutro\ pada | dzis\ pada \cap niska\ temp) = 0{,}9 \cdot 2{,}45 = 2{,}2$$

$$p(jutro\ pada | dzis\ pada \cap niska\ temp) = \frac{2{,}2}{1+2{,}2} = 0{,}69$$

- Wniosek: jutro: pada [0,69], nie pada [0,86]

Działanie systemu wnioskowania – dialog cd.

- *Jakie jest niebo*?
- Odp: **NIEZACHMURZONE**
- Obliczenia:
  na podstawie reguły 6 (LN): $O(jutro\ \ pada) = \frac{0{,}69}{1-0{,}69} = 2{,}23$

$$O(jutro\ \ pada | dzis\ pada \cap niska\ \ wilgotnosc \cap niska\ \ temp \cap niebo\ \ pochmurne) = 2{,}23 \times 1 = 2{,}23$$

$$p(jutro\ \ pada | dzis\ pada \cap niska\ \ wilgotnosc \cap niska\ \ temp \cap niebo\ \ pochmurne) = \frac{2{,}23}{1+2{,}23} = 0{,}69$$

- Wniosek: jutro: pada [0,69], nie pada [0,86]

Zastosowanie (Mozilla)

- Autor Paul Graham – filtr do spamu.
- Filtr oparty jest na wnioskowaniu Bayes'a.
- Użytkownik wskazuje wiadomości typu spam i normalne (dwie klasy) i na ich podstawie tworzone są wagi dla słów oparte na prawdopodobieństwie.
- Skuteczność jest niezwykle wysoka:
  - program przepuścił 5 na 1000 wiadomości typu spam,
  - nie odrzucił żadnej z dobrych wiadomości.

Jak to działa?

- Podział wiadomości na dwie klasy:
  1. dobre
  2. spam.
- Skanowanie całego tekstu (cała wiadomość z nagłówkami, osadzony html i javascript) i wyłuskiwanie tokenów, odrzucane:
  - separatory,
  - wartości całkowicie liczbowe,
  - komentarze z html'a.
- Zliczenie wystąpień każdego tokena i obliczenie prawdopodobieństwa jego wystąpienia:
  - liczba dobrych tokenów jest podwajana, by nie wpadały przez przypadek jako spam,
  - rozważane są słowa, które pojawiły się więcej niż 5 razy,
  - prawdopodobieństwo a priori pojawienia się słowa w jednym bloku, ale nie w drugim jest 0,01 i 0,99.

Jak to działa?

- Jeżeli pojawi się nowa wiadomość, to jest skanowana. Pobieranych jest 15 najbardziej interesujących tokenów, przy czym interesujący znaczy daleki od neutralnej wartości (spam czy nie spam), czyli 0.5.
- Oblicza się łączne prawdopodobieństwo 15 tokenów i otrzymuje odpowiedź.
- Słowa, które nigdy się nie pojawiły mają przypisane prawdopodobieństwo 0.4 (czyli zakładamy, że jest niewinne i nie pochodzi ze spamu.)
- Mail traktowany jest jako spam, gdy prawdopodobieństwo, że jest podejrzane jest większe od 0.9

Zalety

- Nie trzeba czytać dużej liczby spamu, by określić filtry.
- Metoda bierze pod uwagę wszystkie dowody za i przeciw.
- Dla każdego użytkownika można policzyć prawdopodobieństwo występowania tokenów dla jego indywidualnych i wybranych wiadomości.
- Nie musi być łączony z białą listą (listą adresów, z których akceptujemy wiadomości).
- Ewoluuje wraz ze spamem. Zmiany w mailach powodują zmiany w statystykach.

Przykład

- madam 0.99
- promotion 0.99
- republic 0.99
- shortest 0.047225013
- mandatory 0.047225013
- standardization 0.07347802
- sorry 0.08221981
- supported 0.09019077
- people's 0.09019077
- enter 0.9075001
- quality 0.8921298
- organization 0.12454646
- investment 0.8568143
- very 0.14758544
- valuable 0.82347786

Słówka "madam" czy "promotion" przyczyniają się do oceny na korzyść spamu a słówko „shortest" wręcz przeciwnie.

Jednak przewaga jest słów z prawdopodobieństwem wskazującym na spam.

Reguła Bayes'a dała temu mailowi miarę 0.9027, czyli **spam**

Metody oparte na współczynniku wiarygodności

- Alternatywa dla wnioskowania Bayes'a.
- MYCIN – system, w którym wprowadzono współczynniki wiarygodności – jest to medyczny system ekspertowy określający siłę przekonania o wiarygodności hipotezy nie oparty na logicznych i matematycznych zależnościach między danymi. Jego przeznaczeniem było stawianie diagnozy i wyznaczanie terapii przy chorobach krwi.
- Zastosowanie, gdy brak spójnych danych statystycznych.
- Naśladują procesy myślowe przy wnioskowaniu prowadzonym przez eksperta - człowieka.

Współczynnik wiarygodności

- Współczynnik wiarygodności – ***cf*** – jest miarą przekonań eksperta.
- Ma wartość z przedziału –1(fałsz) do 1(prawda).
- Wartości >0 są miarą przekonania o hipotezie.
- Wartości <0 są miarą braku przekonania o hipotezie.

Reguły w systemie dowodzenia

- Reguły mają postać:
  IF D <dowód>
  THEN H<hipoteza> {*cf*}
- *cf* jest miarą ufności w hipotezę H, gdy dany jest dowód D.

MB (measure of belief)

- Wykorzystuje się dwie funkcje oceny (mają wartości od 0 do 1):
  - miara przekonania o hipotezie H oparta o prawdopodobieństwo: MB(H,D):

$$MB(H,D)=\begin{cases} 1 & if\ p(H)=1 \\ \dfrac{p(H\mid D)-p(H)}{1-p(H)} & otherwise \end{cases}$$

  - Ekspert ocenia jak bardzo przedstawiony dowód D redukuje jego wątpliwości w wypadku braku dowodu (1 –p(H)).
  - Jeżeli dowód jest słaby, to p(H|D) – p(H) jest bliskie 0 i jego wątpliwości nie ulegną zmianie.

MD (measure of disbelief)

- miara braku przekonania w hipotezę H w oparciu o prawdopodobieństwo: MD(H,D):

$$MD(H,D) = \begin{cases} 1 & \text{if } p(H) = 0 \\ \dfrac{p(H) - p(H|D)}{p(H)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Ekspert ocenia jak bardzo przedstawiony dowód D redukuje jego przekonanie o hipotezie p(H).
- p(H) prawdopodobieństwo a priori, że H jest TRUE,

Całkowity współczynnik

➔W oparciu o MB i MD wyznaczamy *cf*:

$$cf = \frac{MB(H,D) - MD(H,D)}{1 - \min[MB(H,D), MD(H,D)]}$$

➔stąd *cf* ma wartości z zakresu –1 do 1, które oznacza całkowite przekonanie o hipotezie H.

Jak działa MYCIN?

- Najczęściej reguły są złożone, tzn. że zaobserwowanie pewnej wartości może pociągać różne wyniki:
  IF A jest X
  THEN B jest Y {cf 0,7}
  B jest Z {cf 0,2}
- Oznacza, to że w 10% wypadków nie wiemy jaka jest odpowiedź – jest to wartość (odpowiedź), której dotychczas nie zaobserwowano.

Obliczanie *cf* – pojedynczy dowód

- *cf*(H,D) dla reguły z jednym dowodem oblicza się jako mnożenie *cf(D)* dowodu i *cf* reguły:

$$cf(H,D) = cf(D) \times cf$$

- Przykład:
  IF niebo czyste
  THEN prognozujemy słońce {*cf* 0.8}
  cf(D) dla czyste niebo to 0.5
  zatem *cf*(H,D)=0.5*0.8=0.4
  co czytamy, że „*może być słonecznie*”.

Obliczanie *cf* przy koniunkcji wielu dowodów

- Zasady:
  IF <dowód D1>
  AND <dowód D2> ...
  AND <dowód Dn>
  THEN <hipoteza> {*cf*}
- to:

$$cf\,(H, D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n) = \min[cf\,(D_1), cf\,(D_2), \ldots, cf\,(D_n)] \times cf$$

- Przykład:
  IF niebo czyste
  AND prognozujemy słońce
  THEN noś okulary {*cf* 0.8},
  gdzie: *cf*(D1)=0,9 i *cf*(D2)=0.7

$$cf\,(H, D_1 \cap D_2) = \min[0.9, 0.7] \times 0.8 = 0.56$$

Obliczanie *cf* przy dysjunkcji wielu dowodów

- Zasady:
  IF <dowód D1>
  OR <dowód D2>...
  OR <dowód Dn>
  THEN <hipoteza> {*cf*}
- to:

$$cf\,(H, D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n) = \max[cf\,(D_1), cf\,(D_2), \ldots, cf\,(D_n)] \times cf$$

- Przykład:
  IF niebo zachmurzone
  OR prognozujemy deszcz
  THEN weź parasol {*cf* 0.9},
  gdzie: *cf*(D1)=0,6 *cf*(D2)=0.8

$$cf\,(H, D_1 \cup D_2) = \max[0.6, 0.8] \times 0.9 = 0.72$$

Obliczanie *cf*, gdy wiele zdarzeń wpływa na tą sam hipotezę

- Zasady:
  IF A jest X
  THEN B jest Y {*cf1*}
  IF C jest Z
  THEN B jest Y {*cf2*}
- to:

$$cf(cf_1, cf_2) = \begin{cases} cf_1 + cf_2 \times (1 - cf_1) & if\ cf_1 > 0\ and\ cf_2 > 0 \\ \dfrac{cf_1 + cf_2}{1 - \min[|cf_1|, |cf_2|]} & if\ cf_1 > 0\ or\ cf_2 > 0 \\ cf_1 + cf_2 \times (1 + cf_1) & if\ cf_1 < 0\ and\ cf_2 < 0 \end{cases}$$

- Przykład: *cf*(D1)= *cf*(D2)= 1.0
  cf_1(H,D1)=1*0.8=0.8 cf_2(H,D2)=1*0.6=0.6
  $cf(cf_1, cf_2)= cf_1+cf_2$*[1-$cf_1$] = 0.92

Analiza wzoru

- Jeżeli wiele zdarzeń wpływa na tą samą hipotezę, to:
  - jeżeli oba zdarzenia wzmacniają przekonanie o hipotezie przekonanie wzrasta przy złożeniu obu warunków,
  - jeżeli jedno zdarzenie wzmacnia, a drugie osłabia przekonanie o hipotezie to całkowity współczynnik wiarygodności zmniejszy się,
  - jeżeli oba zdarzenia osłabiają hipotezę to ich złożenie da jeszcze bardziej osłabiający współczynnik wiarygodności.

Przykład dla prognozowania pogody- reguły

1. IF dziś pada
   THEN jutro pada {*cf*=0,5}
2. IF dziś nie pada
   THEN jutro nie pada {*cf*=0,5}
3. IF dziś pada
   AND wilgotność jest niska
   THEN jutro nie pada {*cf*=0,6}

Przykład dla prognozowania pogody- reguły

4. IF dziś pada
   AND wilgotność jest niska
   AND temperatura jest niska
   THEN jutro nie pada {*cf*=0,7}
5. IF dziś nie pada
   AND temperatura jest wysoka
   THEN jutro pada {*cf*=0,65}
6. IF dziś nie pada
   AND temperatura jest wysoka
   AND niebo jest pochmurne
   THEN jutro pada {*cf*=0,55}

Działanie systemu wnioskowania – dialog

- *Jaka jest dziś pogoda*?
- Odp: **PADA**
- Obliczenia:
  - na podstawie reguły 1:
  - *cf*(jutro pada,dziś pada)=1*0,5=0,5
- Wnioski:
  - jutro: pada [0,5]

Działanie systemu wnioskowania – dialog cd.

- *Jaka jest dziś wilgotność*?
- Odp: **NISKA**
- *Jaka jest stopień wilgotności podaj współczynnik od 0 do 1*?
- Odp: **0.8**
- Odpowiedzi:
  - na podstawie reguły 3:

$$cf(jutro\ nie\ pada, dzis\ \ pada \cap niska\ \ wilgotnosc) =$$
$$= \min[cf(dzis\ \ pada), cf(niska\ \ wilgotnosc)] \times cf\ =$$
$$= \min[1{,}0.8] \times 0.6 = 0.48$$

- Wniosek: jutro: pada [0,5], nie pada [0,48]

Działanie systemu wnioskowania – dialog cd.

- *Jaka jest dziś temperatura*?
- Odp: **NISKA**
- *Jaka jest stopień wiarygodności stwierdzenia, że temperatura jest niska*?
- Odp: **0.9**
- Obliczenia:
  - na podstawie reguły 4:

$$cf(jutro\ nie\ pada, dzis\ \ pada \cap niska\ \ wilgotnosc \cap niska\, temp) =$$
$$= \min[cf(dziś\ \ pada), cf(niska\ \ wilgotnosc), cf(niska\, temp)] \times cf =$$
$$= \min[1, 0.8, 0.9] \times 0.7 = 0.56$$

- Wniosek: jutro: pada [0,50], nie pada [0,56]

Działanie systemu wnioskowania – dialog cd.

- Złożenie reguł 3 i 4 w ocenie hipotezy nie pada:

$$cf(cf_{regula3}, cf_{regula4}) = cf_{regula3} + cf_{regula4} \times (1 - cf_{regula3})$$
$$= 0.48 + 0.56 \times (1 - 0.48) = 0.77$$

- Wniosek: jutro: pada [0,50], nie pada [0,77]

Porównanie wnioskowanie Bayes'a i współczynnik wiarygodności

- Zastosowanie: planowanie, prognozowanie, tam gdzie dostępne są dane statystyczne.
- Przykład działającego systemu: PROSPECTOR – geologia.
- Matematycznie poprawny (teoria prawdopodobieństwa).

- Zastosowanie: planowanie, prognozowanie, tam gdzie brak danych statystycznych.
- Przykład działającego systemu: MYCIN – medycyna.
- Brak matematycznej poprawności. Dane pochodzą z ocen ekspertów z dziedziny.

Cechy wspólne

- Propagowanie przekonań wzrasta wykładniczo, dlatego nie nadaje się dla bardzo dużych baz wiedzy.
- Problemem jest znalezienie właściwej metody określania prawdopodobieństw i współczynników, ponieważ ludzie są tendencyjni w ocenach.