Metody numeryczne

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

October 21, 2020

1 Macierze.

Definicja Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. **Normą** nazywamy odwzorowanie

$$\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$$

spełniające trzy aksjomaty dla dowolnych $x, y \in V$ oraz $\lambda \in K$:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Na potrzeby dalszych rozważań przyjmijmy że $V = \mathbb{R}^n$ oraz $K = \mathbb{R}$.

Definicja Przez l_1 oznaczamy normę:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Definicja Przez l_2 oznaczamy normę:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Definicja Przez l_p oznaczamy normę:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

Definicja Przez l_∞ oznaczamy normę:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

W dalszych definicjach ograniczmy się do macierzy kwadratowych o rozmiarze $n \times n$.

Definicja **Indukowaną normą macierzy** stopnia n definiujemy jako:

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \{\|Au\| : u \in \mathbb{R}^n\}$$

Definicja Przez l_1 (kolumnową) oznaczamy normę macierzową:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Definicja Przez l_2 (spektralną) oznaczamy normę macierzową:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

$\lambda_{max}(A^T A)$ - największa wartość własna macierzy $(A^T A)$

Definicja Przez l_∞ (wierszową) oznaczamy normę:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Definicja Przez l_E (Euklidesową, Frobeniusa) oznaczamy normę:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}$$

References

[1] D. Kincaid, *Analiza numeryczna.* WNT, 2005.

[2] G. Golub, C. Van Loan *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, 2013.