## Podstawowe reguły transformacji Laplace'a

W Tablicy D1 podano definicje prostego oraz odwrotnego przekształcenia Laplace'a, a następnie podano podstawowe własności tych przekształceń. Tablica D2 zawiera wybrane (najczęściej spotykane w praktyce) pary odpowiadających sobie oryginałów i obrazów. Wreszcie w Tablicy D3 podano wzory, ułatwiające znajdowanie oryginałów dla obrazów w postaci funkcji wymiernych.

| | |
|---|---|
| Transformata Laplace'a | $F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t$ |
| Odwrotna transformata Laplace'a | $f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) \cdot e^{st} \mathrm{d}s$ |
| Liniowość | $L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$ |
| Podobieństwo | $L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F(\frac{s}{\alpha}), \ \alpha > 0$ |
| Przesuniecie argumentu oryginału | $L[f(t-\alpha)] = F(s) \cdot e^{-\alpha s}$ |
| Przesuniecie argumentu obrazu | $L[f(t) \cdot e^{s_0 t}] = F(s - s_0)$ |
| Transformata pochodnej | $L[f'(t)] = sF(s) - f(0_+)$ |
| Transformata wyższych pochodnych | $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0_+)$ |
| Transformata całki | $L[\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau] = \frac{1}{s} F(s)$ |
| Transformata całki iterowanej | $L[\int_0^t \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} f(\tau_1) \mathrm{d}\tau_1] = \frac{1}{s^n} F(s)$ |
| Granica oryginału w zerze | $\lim_{t \to 0_+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$ |
| Granica oryginału w nieskończoności | $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$ |
| Transformata splotu oryginałów | $L[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$ |
| Całka Duhamela | $L^{-1}[sF(s)G(s)] = f(t)g(0_+) + f(t) * g'(t)$ |
| Różniczkowanie obrazu | $F'(s) = -L[tf(t)]$ |
| Wyższe pochodne obrazu | $F^{(n)}(s) = (-1)^n L[t^n f(t)]$ |
| Splot obrazów | $L[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{x=\sigma - j\infty}^{x=\sigma + j\infty} F(x) G(s-x) dx$ |

Tablica D1. Własności przekształcenia Laplace'a

| Oyginał funkcji | Transformata funkcji |
|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)=L[f(t)]$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $\mathbf{1}(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{s^n}$ |
| $\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\alpha)$ | $\frac{1}{s}(1-e^{-\alpha s})$ |
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}$, $n>0$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ |
| $\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$ | $\frac{1}{s(s+\alpha)}$ |
| $\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$ | $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ |
| $\frac{1}{\alpha\beta}(1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t}-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{-\beta t})$ | $\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$ |
| $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $\frac{1}{\omega}\sin\omega t\cdot e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ |
| $\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\cdot e^{-\xi\omega_n t}$ | $\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ |
| $\cos\omega t\cdot e^{-\alpha t}$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ |
| $\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}+\frac{1}{\omega\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}$, $\varphi=-\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\alpha}$ | $\frac{\omega}{s[(s+\alpha)^2+\omega^2]}$ |
| $\frac{1}{\omega_n^2}-\frac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi)\cdot e^{-\zeta\omega_n t}$, $\varphi=\arccos\zeta$ | $\frac{1}{s[s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2]}$ |
| $\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t-1+e^{-\alpha t})$ | $\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$ |
| $\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha t\cdot e^{-\alpha t})$ | $\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$ |

Tablica D2. Oryginały i transformaty Laplace'a

| | |
|---|---|
| Funkcja wymierna o biegunach jednokrotnych | $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\sum_{k=1}^{n}A_k\dfrac{1}{s-p_k},\ p_i\neq p_j\ \ \forall i\neq j,$<br>$f(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot e^{p_k t},$<br>$A_k=\left.\dfrac{N(s)}{D'(s)}\right\vert_{s=p_k},\ \ k=1,\ldots,n$ |
| Funkcja wymierna o biegunach jednokrotnych i biegunie w zerze | $F(s)=\dfrac{N(s)}{sD(s)}=\sum_{k=0}^{n}A_k\dfrac{1}{s-p_k},\ p_i\neq p_j\ \ \forall i\neq j,$<br>$f(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cdot e^{p_k t},\ \ p_0=0,$<br>$A_0=\dfrac{N(0)}{D(0)},\quad A_k=\left.\dfrac{N(s)}{sD'(s)}\right\vert_{s=p_k},\ \ k=1,\ldots,n$ |
| Funkcja wymierna o biegunach wielokrotnych | $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}A_{ij}\dfrac{1}{(s-p_i)^j},$<br>$p_i$ – biegun $n_i$ – krotny, $i=1,\ldots,n,$<br>$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\dfrac{A_{ij}}{(j-1)!}\cdot t^{j-1}\cdot e^{p_i t},$<br>$A_{ij}=\dfrac{1}{(n_i-j)!}\cdot\left.\dfrac{\mathrm{d}^{n_i-j}}{\mathrm{d}s^{n_i-j}}\dfrac{N(s)}{D_i(s)}\right\vert_{s=p_i},\ \ j=1,\ldots,n_i$<br>$D_i(s)=\dfrac{D(s)}{(s-p_i)^{n_i}},\quad i=1,\ldots,n.$ |

Tablica D3. Wyznaczanie odwrotnych transformat Laplace'a funkcji wymiernych