Instrukcja MATLAB 1

TEMAT: Pisanie prostych skryptów do rozwiązywania konkretnych problemów:układ liniowy równań, rysowanie funkcji, ciągów, obliczanie pochodnej w punkcie oraz całkowanie metodą Monte Carlo.

Wojciech Sałabun KMSIiMS

Zadanie 1.

Rozwiąż liniowy układ równań (każdy otrzyma na zajęciach indywidualny układ równań):

(a) za pomocą obliczeń macierzowych.

(b) za pomocą wzorów Cramera.

Ad a.

Rozwiązanie zostanie zilustrowane na prostym przykładzie (1):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned} \qquad (1).$$

W celu rozwiązania należy zapisać (1) w postaci macierzowej (2) :

$$A\cdot X=B \qquad (2),$$

gdzie A, B oraz X oznaczają odpowiednio (3):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (3).$$

Rozwiązaniem będzie wówczas, wektor X obliczony na podstawie (4):

$$X=A^{-1}\cdot B \qquad (4)$$

Ad b.

Rozwiązanie będzie również oparte na przykładzie (1). Ponownie współczynniki muszą zostać zapisane do odpowiednich macierzy (3). W tym rozwiązaniu należy jednak ustalić dodatkowo trzy macierze pomocnicze (5):

$$A_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \qquad (5).$$

Następnie obliczamy rozwiązania układu na podstawie wzoru:

$$x_i=\frac{det(A_i)}{det(A)} \qquad (6)$$

Niezbędne funkcje: inv(), det().

UWAGA !!! W obu przypadkach należy pierw sprawdzić czy układ posiada rozwiązanie. Sprawdzenie polega na sprawdzeniu czy wyznacznik macierzy głównej A jest różny zero. Dla macierzy (5) nie wolno wpisywać wartości „ręcznie”. Należy utworzyć odpowiednią liczbę kopii macierzy A (przykładowo nazywając je A1, A2, A3 … AN) oraz nadpisać odpowiednią kolumnę macierzą B.

Zadanie 2.

Każdy student otrzyma indywidualny zestaw wzorów funkcji jednej zmiennej, ciągu liczbowego oraz funkcji dwóch zmiennych. Zadaniem będzie narysowanie wykresu funkcji, pochodnej tej funkcji, punktów ciągu liczbowego, oraz płaszczyzny określonej funkcją dwóch zmiennych.

Rysowanie funkcji jednej zmiennej

Niech będzie dana funkcja (7):

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{b-cx^3} \qquad x\in[d,e] \qquad (7)$$

Określamy dziedzinę funkcji jako (8):

x = d : 0.01 : e; (8)

Zapisujemy następnie funkcję zgodnie z formułą (7). Prostsza metoda polega na przypisaniu nowej wartości do zmiennej y (9):

```
y=(a*x.^ 2+b)./(b-c*x.^3)
```
(9)

Rozwiązanie to nie jest jednak elastyczne. Jeżeli będzie potrzeba ponownego użycia funkcji należy jeszcze raz użyć cały zapis wzoru. Lepszym rozwiązaniem jest zastosowanie funkcji inline() (10):

```
y=inline('(a*x.^ 2+b)./(b-c*x.^3)')
```
(10).

Zapis (10) powoduje, iż każdorazowo wpisanie ***y(argument)*** obliczy wartości funkcji dla podanych argumentów. Rysunek funkcji jednej zmiennej wymaga wówczas użycia prostego polecenia (11):

$$plot(x, y(x)) \tag{11}$$

Powstały wykres należy opisać za pomocą funkcji: title(), xlabel(), ylabel() oraz legend().

Rysowanie pochodnej funkcji jednej zmiennej

Należy wykonać za pomocą definicji pochodnej w punkcie (13):

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta} \tag{13}$$

Za deltę należy przyjąć małą wartość np. 0.01 lub 0.001. Wykonanie tego polecenia najłatwiej zrealizować za pomocą notacji (10). Formułę (13) będzie można zapisać np. w postaci (14):

$$(y(x+0.01)-y(x))/0.01 \tag{14}$$

W tym przypadku proszę nanieść to na ten sam wykres co funkcję (hold on) . Uwzględnić funkcję i pochodną w legendzie. Narysować je różnymi kolorami.

Rysowanie ciągu liczbowego

Procedura identyczna jak w przypadku funkcji jednej zmiennej. Należy narysować w nowym oknie (funkcja figure()). Oczywistą różnicą jest dziedzina. Ciąg liczbowy zaczyna się od pierwszego elementu i ciągnie się do elementu n, zatem (12):

$$x=1:1:n \tag{12}$$

Natomiast przy rysowaniu należy w funkcji (11) dodać dodatkowy atrybut określający wykres punktowy. Proszę pamiętać o dodaniu tytułu podpisaniu osi oraz wpisanie legendy.

Rysowanie funkcji dwóch zmiennych

W tej części zadania należy utworzyć dwie zmienne x oraz y dla dziedziny tak jak (8), ale z większym krokiem (np. około 0.1). Następnie należy utworzyć siatkę dla naszej powierzchni za pomocą polecenia (15):

$$[X, Y]=meshgrid(x, y) \tag{15}$$

Następnie po zapisaniu funkcji tak jak w (10) (przykładowo do zmiennej f) należy zastosować następujące polecenie (16):

$$surf(X, Y, f(X, Y)) \tag{16}$$

Ponownie stosujemy polecenia title(), xlabel(), ylabel() oraz zlabel().

<u>Zadanie 3.</u>

Obliczenie całki oznaczonej za pomocą metody Monte Carlo (funkcja określona w przedziale nad osią OX)

1. Zapisz wzór funkcji za pomocą funkcji inline() (przykładowo $f=inline('...')$)
2. Określ wartość maksymalną i minimalną funkcji $(y_{max}\, oraz\; y_{min})$ na podanym przedziale
3. Wylosuj dużą liczbę N (minimum 10 000) losowych próbek będących punktami (x,y) (np. rand(10 000, 2))
4. Znormalizuj kolumnę x i y do przedziału (np. za pomocą: $(x_i)\cdot(x_{max}-x_{min})+x_{min};(y_i)\cdot(y_{max})+y_{min};$)
5. Posiadamy N znormalizowanych próbek o współrzędnych (x_i, y_i) dla współrzędnej x_i obliczamy rzeczywistą wartość funkcji $f(x_i)$
6. Dokonaj porównania wszystkich wartości próbek $y_i\, z\, f(x_i)$. Zlicz ile próbek losowych ma wartość mniejszą od wyliczonej (przykładowo zmienna **k**)
7. Wynikiem całki oznaczonej na przedziale $x_{min}\, do\, x_{max}$ będzie $V=(x_{max}-x_{min})*(f_{max})*k/N$

(a) Zapisz 10 wyników. Czy są takie same? Jaka jest ich średnia wartość?

(b) Wykonaj rysunek: Narysuj wykres funkcji. Narysuj punkty „pod funkcją” kolor zielony, nad funkcją kolor czerwony. Podpisz tytuł oraz osie.