Polioptymalizacja - Wielooptymalizacja

Znajdowanie, określanie optymalnych rozwiązań problemów w których funkcja kryterialna (funkcja oceniająca jakość przykładowego rozwiązania problemu) składa się nie z jednego lecz z wielu kryteriów składowych.

$K_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – kryterium globalne oceny rozwiązań

$K_i(x_1, \ldots, x_n)$ – składowe kryterium nr „i", $i \in \{1, \ldots, m\}$ od którego, między innymi, zależy wartość kryterium globalnego K_g

Uwaga!

W problemach rzeczywistych kryterium globalne K_g nie jest zwykle sumą kryteriów składowych tzn

$$K_g \underset{\text{zwykle}}{\neq} a_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + \ldots, a_m K_m$$

Zwykle:

$$K_g = f(K_1, K_2, \ldots, K_m)$$

Zwykle w literaturze naukowej naukowcy i inżynierowie stosują ze względu na łatwość matematycznego rozwiązywania problemu, uproszczoną formę liniową, która zwykle jest wysoce błędna względem prawdziwego kryterium K_g stosowanego przez decydenta problemu!

K_g - wiarygodność kredytowa klienta banku

$$K_g = f(K_1, \ldots, K_n)$$

K_1 - wysokość pensji

K_2 - liczba osób na utrzymaniu

K_3 - wartość posiadanego majątku

K_4 - zadłużenie w innych bankach

K_5 - czas pracy [lata] w obecnym miejscu pracy

K_6 - czas pracy [lata] w poprzednim miejscu pracy

K_7 - wysokość kredytu jaki klient chce uzyskać

K_8 - wysokość raty miesięcznej jaką klient chce spłacać

K_9 - wizerunek psychologiczny klienta

$$K_g \neq a_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + \ldots + a_9 K_9$$

K_g – wytrzymatość stali na zrywanie $[KG/mm^2]$

$K_g = f($

K_1 – zawartość % węgla w stali

K_2 – zawartość % krzemu w stali

K_3 – zawartość % molibdenu w stali

K_4 – rodzaj obróbki cieplnej (odpuszczanie, hartow

K_5 – zawartość % fosforu

K_6 – rodzaj obróbki chemicznej (nawęglanie, azotowanie)

K_7 – zawartość platyny %

K_8 –

$\vdots$

K_n

$$K_g \neq a_0 + K_1 a_1 + a_2 K_2 +, \ldots, + a_n K_n$$

Ocena przyspieszenia czasu obliczeń uzyskana przez zrównoleglenie obliczeń

(przyspieszenie = $\frac{\text{czas obliczeń programu zrównoleglon.}}{\text{czas obliczeń programu szeregowego}}$

K_S – przyspieszenie obliczeń

$K_S = f(K_1, K_2, K_3)$

K_1 – BUR – współczynnik mówiący o szybkości dostępu do magistrali FSB

K_2 – LCMI – współczynnik mówiący o braku danych w pamięci L2

K_3 – MDSR – współczynnik informujący o problemach z dostępem do danych przez więcej niż jeden wątek

$K_S \neq a_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3$

K_g – jakość zespołu muzycznego grającego na weselach, studniówkach, etc

$$K_g = f(K_1, K_2, K_3, K_4)$$

K_1 – cena zespołu (1 noc)

K_2 – popularność zespołu (ilość „zagranych" wesel,

K_3 – rodzaj muzyki grany przez zespół

K_4 – długość bloków muzycznych granych przez zespół

$$K_g \neq a_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + a_4 K_4$$

Ocena jakości komputera

K_g – generalna, sumaryczna ocena jakości komputera

$$K_g = f(K_1, K_2, \ldots, K_6)$$

K_1 – rok produkcji

K_2 – taktowanie procesora

K_3 – pojemność dysku

K_4 – pamięć

K_5 – atrakcyjność wyglądu komputera

K_6 – marka producenta

$$K_g \neq a_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + a_4 K_4 + a_5 K_5 + a_6 K_6$$

Przykłady problemów Polioptymalizacyjnych

1. Atrakcyjność samochodu używanego dla osoby kupującej

Atrakcyjność globalna = K_g

Multikryterium globalne. Jego wartość zależy od kryteriów składowych

K_1 – cena samochodu żądana przez sprzedającego

K_2 – przebieg samochodu [tys. km]

K_3 – wiek samochodu [lata]

K_4 – zużycie paliwa [l/100 km]

K_5 – ogólny stan techniczny samochodu [0, 10 pkt

K_6 – atrakcyjność marki samochodu [0, 10 pkt]

K_7 – atrakcyjność wyposażenia samochodu [0, 10

K_8 – pojemność przestrzeni całkowitej [m^3]

K_9 – pojemność bagażnika [m^3]

K_{10} – moc silnika [kM]

K_{11} – rodzaj silnika (benzyna, diesel, gaz, ...

K_{12} – przyspieszenie [sek/100 m]

⋮

$$K_g \neq \sum^{12} a_i K_i \qquad K_g = f(K_1, K_2, \dots, K_{12})$$

K_g

Ocena atrakcyjności portali internetowych multikryterium

Kryteria składowe

K_1 - liczba użytkowników, którzy dokonali conajmniej jednej odsłony na witrynie w danym miesiącu

K_2 - liczba wyświetleń liczba wyświetleń strony

K_3 - suma czasów spędzonych przez użytkowników na wybranej witrynie.

K_4 - średni czas jaki użytkownicy spędzają na wybranej witrynie w ciągu np. 1 miesiąca

K_5 - obszar stosunek liczby użytkowników, którzy dokonali przynajmniej jednej odsłony na wybranej witrynie do całkowitej liczby internautów w miesiącu

K_6 - współoglądalność - % udział liczby użytkowników danej witryny w liczbie wszystkich użytkowników, którzy odwiedzili wszystkie witryny

$$K_g = f(K_1, \ldots, K_6)$$

Algebraic Statement of Linear Programming Problems

The geometric interpretation of linear programming problems gives important insights into several aspects of the optimization process, and we will consider it in much greater detail in Chapter 4. However, when the number of decision variables is greater than two or three, it is clumsy or impossible to actually solve a linear programming problem by the graphical method illustrated above. Real linear programming problems commonly contain hundreds or thousands of decision variables and constraints, and for their solution it is necessary to work directly with the algebraic statement of the problem. An algebraic statement of the Oakwood problem is

$$\text{maximize } z = 20x_1 + 15x_2 \qquad \text{objective function}$$

subject to

$$\left.\begin{aligned} x_2 &\le 8 \\ 2x_1 - \quad x_2 &\le 0 \\ 2x_1 + \quad x_2 &\le 12.5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \text{constraints}$$

Such an algebraic formulation is referred to as a **linear program.** The preceding linear program is also commonly referred to as a linear programming **model** of the word problem stated at the beginning of this section because the constraints and objective of the real problem are represented mathematically in the algebraic formulation. Any linear programming problem can be stated algebraically in several different ways, so there are alternative (mathematically equivalent) models for every problem, but every linear program has the following general form:

maximize
or
minimize — a linear function of several variables

subject to — linear inequality constraints
or
linear equality constraints

In the next section we formulate several more example problems as linear programs to illustrate the process and discuss how decision variables are chosen. With this motivation the reader should be ready for the presentation in Chapter 3 of the simplex algorithm, a powerful analytic method for solving linear programs.

2.2 FURTHER LINEAR PROGRAMMING FORMULATION EXAMPLES

The examples in the remainder of this chapter illustrate some applications of linear programming and demonstrate how to formulate models. There are literally thousands of applications, and the reader should consult some of the references at the end of this chapter to see other application areas. So that the

2.3.2 *Weighting method*

The key idea of the weighting method is to transform the multiple objectives in the MOLP (2.2.2) problem into a weighted single objective functions, which are described as follows (Kuhn and Tucker, 1951, Zadeh, 1963):

$$\begin{cases} \max \ wf(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x) \\ \text{s.t.} \quad x \in X \end{cases} \tag{2.3.1}$$

where $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \geq 0$ is a vector of weighting coefficients assigned to the objective functions.

Let us consider the following example of MOLP problem.

$$\max f(x) = \max \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

When $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$, the weighting problem is formulated as

$$\begin{cases} \max \ wf(x) = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad x \in X \end{cases} \tag{2.3.3}$$

The optimal solution is $(x_1^*, x_2^*) = (3, 8)$, and the optimal objective function values are $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x))^T = (14,13)^T$.

When $w_1 = 1, w_2 = 0$, the optimal solution is $(x_1^*, x_2^*) = (9, 3)$, and the optimal objective function values are $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x))^T = (21,-3)^T$.

When $w_1 = 0, w_2 = 1$, the optimal solution is $(x_1^*, x_2^*) = (0, 7)$, and the optimal objective function values are $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x))^T = (7,14)^T$.

2.3.3 *Goal programming*

Goal programming was originally proposed by Charnes and Cooper (1961) and has been further developed by Lee (1972), Ignizio (1976 and

CHAPTER 9

NONLINEAR PROGRAMMING

In this chapter we consider mathematical programming problems in which the decision variables are real but the objective and constraint functions are not necessarily linear. Such problems are called continuous-variable nonlinear programs, or simply **nonlinear programs.** We shall see below that any nonlinear program can be written as

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}}\ \ f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, m \end{array}}$$

Problems of this form arise unavoidably in engineering applications such as process design and optimal control, in scientific applications such as parameter estimation and the approximation of functions, and as subproblems in nonlinear integer programs. In addition, many problems commonly formulated as linear programs are really nonlinear, and the simplifying approximation of linearity may be justified for only some values of problem data. Thus many of the linear programming applications described in Part I give rise to nonlinear programming formulations when economies of scale and other effects cause departures from strict proportionality between inputs and outputs.

9.1 A NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEM

To see how nonlinearities can enter into problems of the sort we have studied before, recall the Oakwood Furniture problem of Section 2.1. Suppose the

Tablica 2. Warunki konieczne i dostateczne optymalności lokalnej

Warunki konieczne 1-go rzędu	Warunki konieczne 2-go rzędu	Warunki dostateczne	Charakter punktu
$g(\bar{x}) = \mathbf{0}^T$ punkt stacjonarny	$H(\bar{x}) \leq 0$	$H(\bar{x}) < 0$	maksimum lokalne
	$H(\bar{x}) \geq 0$	$H(\bar{x}) > 0$	minimum lokalne
	$H(\bar{x})$ znako-nieokreślone		punkt siodłowy
	$H(\bar{x}) = 0$		wymagana analiza wyższych składników szeregu Taylora

XI.3.2 Warunki optymalności formy kwadratowej

Niech:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} x^T Hx + b^T x + c} \tag{40}$$

gdzie H - macierz kwadratowa, symetryczna $(n \times n)$, nie równa tożsamościowo zeru, b - wektor n-elementowy. Macierz H *jest hessjanem formy kwadratowej* (40).

Gradient funkcji $f(x)$ wyraża się wzorem:

$$g(x) = (Hx + b)^T \tag{41}$$

Warunki stacjonarności $f(x)$ mają postać wektorowego równania liniowego:

$$Hx + b = \mathbf{0} \tag{42}$$

Równanie (42) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy (Manteuffel, Seifart, 1975), gdy:

$$r = \text{rząd } H = \text{rząd } (H, b) \tag{43}$$

Jeśli rząd $H = n$ to macierz H jest nieosobliwa $(\det H \neq 0)$ i równanie (42) ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$\bar{x} = -H^{-1} b \tag{44}$$