Matematyka dyskretna

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

March 24, 2019

5 Funkcje

ZASTOSOWANIE: Zagadnienie odwracalności funkcji.

1. $\star$ Zbadać, czy podane relacje są funkcjami:
   (a) $\rho \subseteq (\mathbb{R}^+)^2, x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Uwaga: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.
   (b) $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \rho = \{(x, y) : x^3 = y^2\}$
   (c) $\rho = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$
   (d) $\rho \subseteq \mathbb{R}^2, \rho = \{(x, y) : x = y^2\}$
   (e) $\rho \subseteq \mathbb{C}^2, x\rho y \Leftrightarrow \text{Im } x = \text{Re } y$
2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$. Wyznaczyć $f^{\to}(A)$ (obraz zbioru A względem przekształcenia f):
   (a) $f(x) = 4x + 12, A = \{1, 3, 5\}$
   (b) $f(x) = 5x + 1, A = (-2, 1)$
   (c) $f(x) = |x - 2|, A = [1, 6)$
   (d) $f(x) = 8, A = [1, 6)$
   (e) $\begin{cases} x - 3 \text{ dla } x < 1 \\ x + 2 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \quad A = [0, 5]$
3. Wyznaczyć obraz zbioru $A = \{5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}$ w przekształceniu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określonym poniżej:
   (a) $f(x)$ jest największą liczbą parzystą mniejszą lub równą x,
   (b) $f(x)$ jest największą liczbą nieparzystą spośród dzielników liczby x.
4. Wyznaczyć $f^{\leftarrow}(B)$ (przeciwobraz zbioru B) względem przekształcenia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) $f(x) = 3x + 2, B = \{5, 11, 14\}$
   (b) $f(x) = |x|, B = \{0, 2, 8\}$
   (c) $f(x) = 1 - x^2, B = [-3, 0]$
   (d) $f(x) = 8, A = [4, 9)$
   (e) $f(x) = 8, A = [4, 7)$
   (f) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ dla } \neq a0 \\ -4 \text{ dla } x = 0 \end{cases} \quad A = (-1, 1)$
5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Znaleźć:
   (a) $f^{\to}([0, 2])$
   (b) $f^{\to}(\{0, 4\})$
   (c) $f^{\to}([-2, 6])$
   (d) $f^{\leftarrow}((-\infty, 0])$

(e) $f^{\leftarrow}((-\infty,-3])$
(f) $f^{\leftarrow}(\{0,25\})$

6. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x)=sin(x)+1$ Znaleźć:

   (a) $f^{\rightarrow}(\{0,\pi\})$
   (b) $f^{\rightarrow}(\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\})$
   (c) $f^{\rightarrow}([0,\frac{3\pi}{2}])$
   (d) $f^{\leftarrow}((\frac{1}{2},\infty))$
   (e) $f^{\leftarrow}((-\infty,1))$
   (f) $f^{\leftarrow}(\{0\})$

7. Niech $a\neq b$, zaś $X=\{a,b,\{a,b\}\}, Y=\{a,b\}$. Niech $f:X\to Y$ będzie odwzorowaniem określonym wzorami $f(a)=f(b)=a, f(\{a,b\})=b$. Znaleźć $f^{\rightarrow}(\{a,b\})$.

8. Udowodnić, że:

   (a) $f^{\rightarrow}(A\cap B)\subset(f^{\rightarrow}(A)\cap f^{\rightarrow}(B))$
   (b) $(f^{\rightarrow}(A)\setminus f^{\rightarrow}(B))\subset f^{\rightarrow}(A\setminus B)$
   (c) $A\subset f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A))$

9. $\star$ Niech $A=\{1,2,5,7\}$, $B=\{3,4,6,8\}$. Które relacje $\rho\subset A\times B$ są funkcjami?

   (a) $\rho=\{(7,4),(2,3),(1,4),(5,6)\}$
   (b) $\rho=\{(2,4),(5,8),(1,3),(7,6)\}$
   (c) $\rho=\{(2,3),(5,6),(7,4)\}$
   (d) $\rho=\{(7,3),(1,4),(5,3),(1,8),(2,6)\}$

   Które z funkcji są injekcjami (różnowartościowe), a które surjekcjami ("na")?

10. Zbadać, czy przekształcenie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest injekcją lub surjekcją. Jeśli f nie jest injekcją, wskazać x_1 i x_2 takie, że $x_1\neq x_2$, ale $f(x_1)=f(x_2)$. Jeśli f nie jest surjekcją, znaleźć $f^{\rightarrow}(\mathbb{R})$.

    (a) $f(x)=x^2$
    (b) $f(x)=x^3$
    (c) $f(x)=x^3-x^2$
    (d) $f(x)=[x]$
    (e) $f(x)=\{x\}$
    (f) $f(x)=2^x$
    (g) $f(x)=2^x+x$
    (h) $f(x)=x\cdot 2^{x-1}$
    (i) $f(x)=\sin x$
    (j) $f(x)=x^4-5x^2+4$
    (k) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

11. Czy funkcja $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ jest bijekcją?
    $$f(x)=\begin{cases}(-1)^n \text{ dla } n \text{ nieparzystych}\\ \frac{1}{n} \text{ dla } n \text{ parzystych}\end{cases}$$

12. Niech $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ będzie określone wzorem $f(n)=n^2+1$. Czy f jest przekształceniem różnowartościowym? Czy f jest przekształceniem "na"?

13. Niech $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ będzie odwzrowaniem określonym wzorem (1) $f((n,k))=nk$, (2) $f((n,k))=n+k+1$.

    (a) Czy f jest odwzorowaniem "na"?

(b) Wyznaczyć $f^{\rightarrow}(\mathbb{N} \times \{2\})$

(c) Wyznaczyć $f^{\leftarrow}(\{0\})$

(d) Wyznaczyć $f^{\leftarrow}(\{2^n : n \in \mathbb{N}\})$

14. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych a, b funkcja f odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie przedział $(1, 2)$ na:

    (a) $(0, 2)$, jeśli $f(x) = ax + b$

    (b) $(1, 3)$, jeśli $f(x) = x^2 + ax + b$

    (c) $(4, 5)$, jeśli $f(x) = ax^2 + 3x + b$

    (d) $(-2, 0)$, jeśli $f(x) = ax^2 + bx + 1$

15. Niech $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f_i : A \to B$ i $g_i : B \to A$.

References

[1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna.* Lulu, 2012.

[2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.

[3] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1972.

[4] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.