AHP — Analityczny Hierarchiczny Proces

Przemysław Klęsk
pklesk@wi.zut.edu.pl

AHP (Thomas L. Saaty, lata 70-te)

Literatura — ogólnie o metodzie:

1. *Analytical Planning/the Logic of Priorities (Analytic Hierarchy Process)*, T. L. Saaty, K. P. Kearns, 1991.
2. *The Hierarchon: A Dictionary of Hierarchies*, T. L. Saaty, 1992.
3. *Decision Making For Leaders*, T. L. Saaty, 1999.
4. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory With the Analytic Hierarchy Process*, T. L. Saaty, 2000.
5. *Theory and Applications of the Analytic Network Process: Decision Making with Benefits, Opportunities, Costs, and Risks*, T. L. Saaty, 2005.
6. *Analityczny hierarchiczny proces decyzyjny*, M. Kwiesielewicz, seria: Badania Systemowe tom 29, Warszawa, 2002.

Literatura — zastosowania:

1. *The Analytic Hierarchy Process in Natural Resource and Environmental Decision Making*, L. Schmoldt i in., 2001.
2. *Analytic Hierarchy Process (AHP) in Software Development (MobiPocket)*, B. K. Jayaswal i in., 2007.
3. *Optimal selection of location for Taiwanese hospitals to ensure a competitive advantage by using the analytic hierarchy process and sensitivity analysis*, C.-R. Wu, C.-T. Lin, H.-C. Chen, 2007.
4. ...

AHP

Do czego służy?

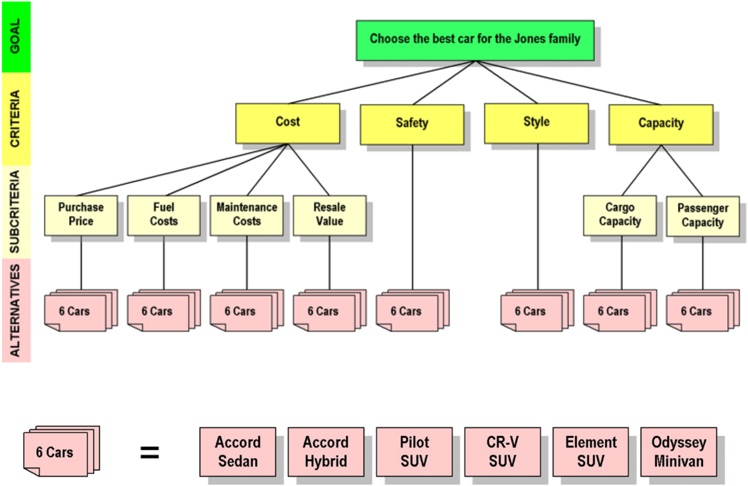
- technika modelowania skomplikowanych problemów decyzyjnych i podejmowania decyzji,
- pozwala wybierać decyzje, które spełniają preferencje zaintersowanego,
- jest metodą ekspertową — powstały model odzwierciedla rozumienie problemu/zjawiska przez eksperta (a niekoniecznie: prawdziwe działanie zjawiska),

Jak to działa? Proces. . .

- ekspert poprzez dekompozycję buduje model danego problemu w postaci struktury drzewa[a] tzw. hierarchia,
- ekspert podaje relacje ważności elementów hierarchii poprzez porównania parami (ang. *pair-wise comparisons*), co prowadzi do tzw. macierzy ocen,
- na podstawie macierzy ocen wylicza się tzw. priorytety reprezentujące rozkład ważności danego elementu hierarchii na elementy-dzieci,
- podjęcie decyzji — wybór spośród kilku możliwości (liście drzewa), polega na przeprowadzeniu obliczeń w górę drzewa — prosta arytmetyka wagowa,
- oceny możliwych decyzji pozwalają dodatkowo uszeregować je w ranking.

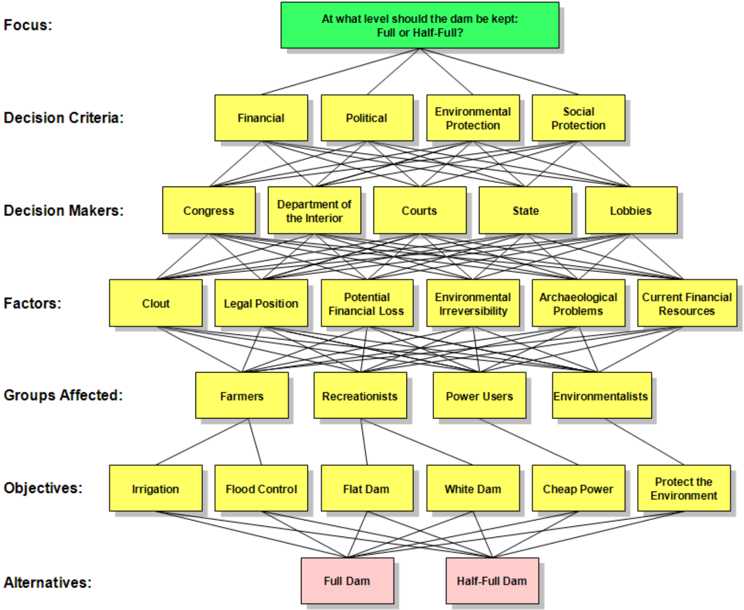
[a] Lub grafu bliskiego drzewu.

Przykład problemu: „wybór samochodu dla rodziny Jones'ów"

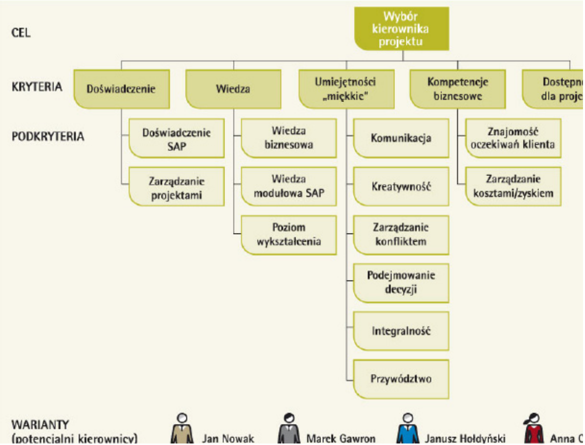


Rysunek: Hierarchia problemu i możliwe wybory. (źródło: *Wikipedia*)

Przykład problemu: „poziom wody na tamie” (źródło: *Wikipedia*)



Przykład problemu: „kierownik dla projektu”

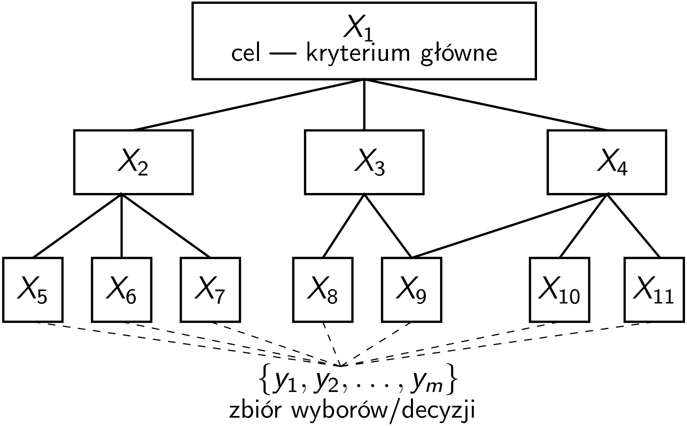


Rysunek: Źródło: *Akademia Wiedzy BCC*, www.bcc.com.pl/akademia

Popularne problemy z indywidualnymi preferencjami eksperta

- wybór uczelni — *gdzie na studia?*,
- wybór oferty pracy,
- wybory polityczne,
- zakup domu, samochodu,
- automatyczne zakupy internetowe (Allegro, Amazon, itp.),
- rozdział zasobów w firmie, rozdział priorytetów w organizacji, itp. (ang. *resource allocation*),

Pojęcia, oznaczenia



c_k zbiór indeksów dzieci elementu o indeksie k (ang. *comparison group*).
Np. $c_2 = \{5, 6, 7\}$, $c_5 = \cdots = c_{11} = \{\}$.

r_k zbiór indeksów rodziców elementu o indeksie k (ang. *covering criteria*).
Np. $r_3 = \{1\}$, $r_9 = \{3, 4\}$, $r_1 = \{\}$.

L zbiór indeksów liści całego drzewa.
Tu: $L = \{5, 6, \ldots, 11\}$.

Porównania parami — macierze ocen

W ramach każdej grupy porównywalnej (*comparison group*), tj. dla każdego elementu X_k posiadającego elementy-dzieci, ekspert musi określić macierz ocen:

$$A_k = \{a_k(i,j)\}, \tag{1}$$

gdzie $a_k(i,j)$ mówi, na ile ważny (preferowany, dominujący) jest element X_i w stosunku do elementu X_j ze względu na ich wpływ na element X_k.

Dla wygody przyjmijmy, że k wskazuje globalny indeks w całej hierarchii, natomiast i,j są lokalnymi indeksami dzieci elementu X_k:

$$1 \leqslant i,j \leqslant \#c_k, \tag{2}$$

i odpowiednio mapują się na globalne indeksy.

Porównania parami — macierze ocen

Skala rang proponowana przez Saaty'ego

1 równa ważność,

3 umiarkowana dominacja i nad j,

5 silna dominacja i nad j,

7 bardzo silna dominacja i nad j,

9 ekstremalna dominacja i nad j,

- Oceny (odczucia, sądy) pośrednie można przedstawiać liczbami $\{2, 4, 6, 8\}$.
- Przewagę j nad i wyrażamy odwrotnościami.
- Ostatecznie wg Saaty'ego, w trakcie procesu oceniania parami do dyspozycji jest zbiór[a]:

$$\left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots, 9\right\}. \tag{3}$$

[a] Ten zbiór nie zawsze pozwala na tzw. *spójność* ocen (przechodniość). O tym później.

Przykład

Przykładowa macierz ocen dla elementu X_1:

$$A_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Uwaga: $\frac{3}{7}, \frac{7}{3} \notin \{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, 9\}$.

Czytanie w wierszach:

$$\frac{X_2}{X_3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad X_2 = 3X_3,$$
$$\frac{X_2}{X_4} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad X_2 = 7X_4,$$
$$\frac{X_3}{X_2} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad X_3 = \frac{1}{3}X_2,$$
$$\vdots$$
$$3X_3 = 7X_4 \quad \Leftrightarrow \quad X_3 = \frac{7}{3}X_4.$$

Macierz ocen

Spójność (ang. *consistency*)

Mówimy, że macierz ocen A jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a(i,i) = 1, \tag{4}$$

$$\forall i,j,l \quad a(i,j)\cdot a(j,l) = a(i,l). \tag{5}$$

W konsekwencji spójności:

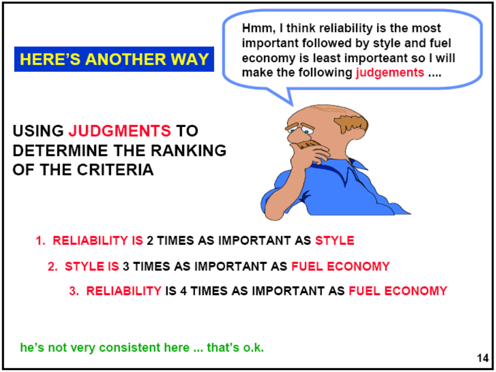
- macierz jest odwrotnościowo-symetryczna względem głównej przekątnej:

$$a(i,j) = \frac{1}{a(j,i)},$$

- dla dowolnie długich ciągów mnożeń zachodzi:

$$a(i,j)a(j,l)a(l,m)\cdots a(x,y)a(y,z) = a(i,z).$$

Niespójne macierze ocen

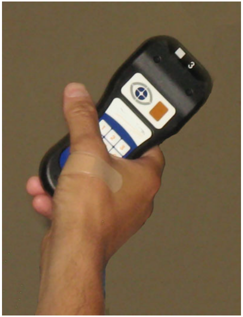


Źródło: R. Haas, O. Mexiner, *An illustrated Guide to the AHP*, http://www.boku.ac/at/mi/.

Metody doprowadzania do spójności

- metoda największej wartości własnej,
- metoda najmniejszych kwadratów,
- metoda najmniejszych logarytmicznych kwadratów, inne. . .

Porównania parami



Rysunek: Źródło: *Wikipedia*.

- Dla macierzy o rozmiarze n potrzeba $n(n-1)$ ocen.
- Dla całej hierarchii potrzeba: $\sum_k \#c_k(\#c_k - 1)$.

Priorytety

Jeżeli macierz A_k jest spójna, to wektor rozkładu priorytetów p_k wyznaczamy sumując wiersze A_k i normalizując do jedności:

$$p_k(i) := \sum_{j=1}^{\#c_{\boldsymbol{k}}} A_k(i,j), \qquad 1 \leqslant i \leqslant \#c_k,$$

$$p_k(i) := \frac{p_k(i)}{\sum_{j=1}^{\#c_{\boldsymbol{k}}} p_k(j)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \#c_k.$$

Priorytety

$$A_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \sum \\ \begin{pmatrix} 11 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{11}{7} \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 0.677 \\ 0.226 \\ 0.097 \end{pmatrix}$$

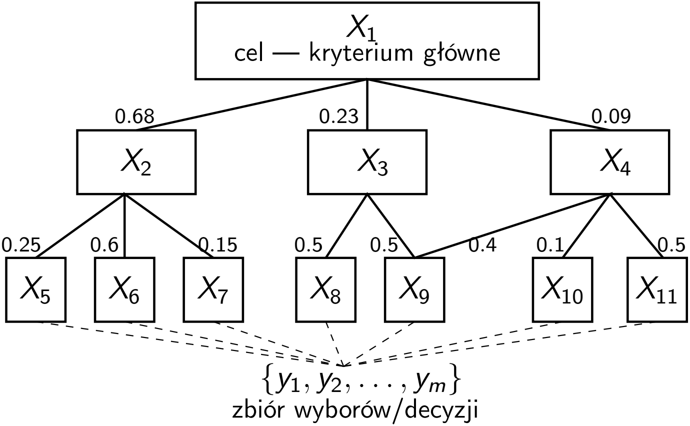
Priorytety

Macierz ocen daje się przedstawić za pomocą priorytetów:

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{p_k(1)}{p_k(1)} & \frac{p_k(1)}{p_k(2)} & \dots & \frac{p_k(1)}{p_k(n)} \\ \frac{p_k(2)}{p_k(1)} & \frac{p_k(2)}{p_k(2)} & \dots & \frac{p_k(2)}{p_k(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p_k(n)}{p_k(1)} & \frac{p_k(n)}{p_k(2)} & \dots & \frac{p_k(n)}{p_k(n)} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

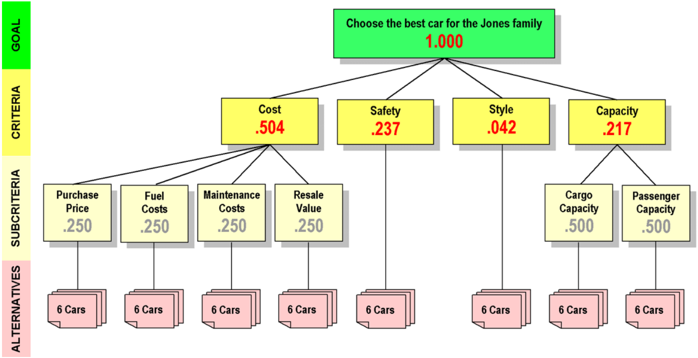
gdzie $n = \#c_k$.

Hierarchia z priorytetami



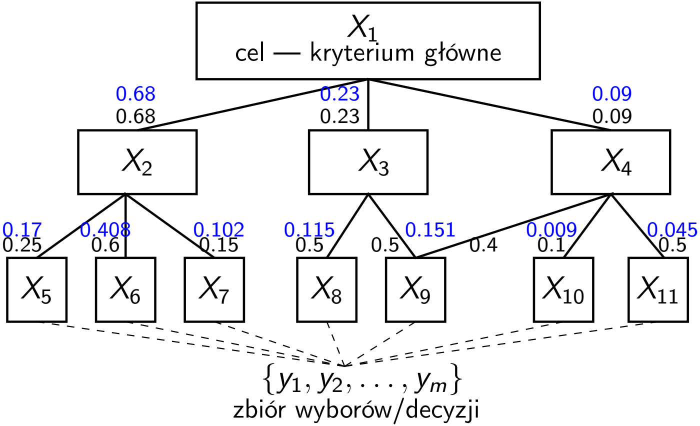
Oceny i hierarchia Jonesów

Criteria A	Criteria B	More Important	Intensity
Cost	Safety	A	3
Cost	Style	A	7
Cost	Capacity	A	3
Safety	Style	A	9
Safety	Capacity	A	1
Style	Capacity	B	7



Rysunek: Źródło: *Wikipedia*.

Priorytety lokalne i globalne



Priorytety globalne — wagi

Rekurencja

Niech $w_k(i)$ oznacza wagę dla elementu i liczoną względem elementu k traktowanego jako korzeń (indeksy globalne).

$$w_k(i) = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k \text{ i } c_k = \{\}; \\ \sum_{j \in c_k} p_k(j) w_j(i), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{7}$$

Wagę globalną dowolnego i-tego elementu znajdujemy wywołując: $w_1(i)$.

Obliczanie decyzji

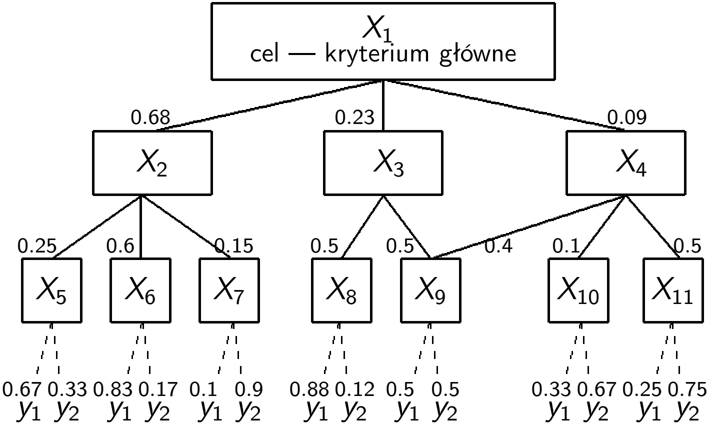
1. Należy „zasilić" liście drzewa poprzez macierze ocen wartościujące poszczególne decyzje $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ w ramach każdego liścia $l \in L$:

$$A_l = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_l(1,1) & a_l(1,2) & \cdots & a_l(1,m) \\ a_l(2,1) & a_l(2,2) & \cdots & a_l(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l(m,1) & a_l(m,2) & \cdots & a_l(m,m) \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Jeżeli macierze A_l są niespójne, należy doprowadzić je do spójności.
3. Dla każdego liścia obliczyć rozkład priorytetów na poszczególne decyzje: $p_l = (p_l(y_1)\ p_l(y_2)\ \cdots\ p_l(y_m))$.
4. Dla każdej decyzji $y \in \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ przeprowadzić arytmetykę wag w górę drzewa, co odpowiada obliczeniu rekurencji $w_1(y)$, jeżeli potraktować decyzje jako nowe liście — dostajemy w ten sposób ranking wartościujący decyzje.
5. Jako najlepszą decyzję wybieramy

$$y^* = \arg\max_y w_1(y).$$

Obliczanie decyzji



$$w_1(y_1) = 0.6359,$$
$$w_1(y_2) = 0.3191,$$
$$y^* = 1.$$

Drugi sposób przedstawienia obliczeń decyzji

1. Obliczyć jednokrotnie i zapamiętać wagi liści hierarchii:

$$w(l) := w_1(l), \quad l \in L.$$

2. Wynikowy ranking decyzji otrzymujemy mnożąc:

$$\begin{pmatrix} w(l_1) & w(l_2) & \cdots & w(l_{\#L}) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{array}{c} \\ X_{l_1} \\ X_{l_2} \\ \vdots \\ X_{l_{\#L}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{l_1}(y_1) & p_{l_1}(y_2) & \cdots & p_{l_1}(y_m) \\ p_{l_2}(y_1) & p_{l_2}(y_2) & \cdots & p_{l_2}(y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{l_{\#L}}(y_1) & p_{l_{\#L}}(y_2) & \cdots & p_{l_{\#L}}(y_m) \end{pmatrix} \end{array},$$

gdzie w macierzy wierszami pisane są rozkłady priorytetów dla liści.

Drugi sposób przedstawienia obliczeń decyzji

- Wartość kryterium głównego X_1 dla pewnej decyzji y jest kombinacją liniową (sumą ważoną) priorytetów liści dla tego y:

$$w_1(y) = \sum_{l \in L} w(l) p_l(y). \tag{8}$$

- Na priorytety $p_l(y)$ w liściach, można patrzeć jak na atrybuty decyzji/obiektu y (zmienne wejściowe). Przy czym są one brane **względem pozostałych decyzji** — nie są stałe dla danej decyzji/obiektu, tj. zmieniają się, gdy zestawić dane y z innymi decyzjami/obiektami.
- Cała hierarchia nie jest już potrzebna, **liście — czynniki najbardziej podstawowe — definiują problem**.
- Często jest tak, że rozkład priorytetów w liściach (na decyzje) daje się precyzyjnie określać liczbowo bez udziału eksperta.

Naprawianie spójności macierzy ocen

1. metoda maksymalnej wartości własnej,
2. metoda najmniejszych logarytmicznych kwadratów.

Metoda maksymalnej wartości własnej

- dla spójnych macierzy A zachodzi własność:

$$Ap = np, \tag{9}$$

(gdzie n jest równe rozmiarowi A), jako że

$$A = \begin{pmatrix} \frac{p(1)}{p(1)} & \frac{p(1)}{p(2)} & \dots & \frac{p(1)}{p(n)} \\ \frac{p(2)}{p(1)} & \frac{p(2)}{p(2)} & \dots & \frac{p(2)}{p(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p(n)}{p(1)} & \frac{p(n)}{p(2)} & \dots & \frac{p(n)}{p(n)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

- w powyższym przypadku dla równania charakterystycznego $\det(A - n\mathbf{1}) = 0$, wszystkie wartości własne z wyjątkiem jednej są zerami.
- dla niespójnych macierzy A, Saaty proponuje naprawić spójność w oparciu o równanie:

$$Ap = \lambda_{\max} p, \tag{11}$$

znajdując wektor p odpowiadający $\lambda_{\max}$ tj. maksymalnej wartości własnej, a następnie normalizując go arytmetycznie (do sumy równej jedności).
- Znając p, wyznaczamy nową macierz ocen A' korzystając z reprezentacji (10).

Metoda maksymalnej wartości własnej — przykład

- Niespójna macierzy ocen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Równanie charakterystyczne:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad \lambda_{\max} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

- Wektor własny odpowiadający $\lambda_{\max}$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.7101 \\ 0.2899 \end{pmatrix} \quad \text{(po normalizacji).}$$

Metoda maksymalnej wartości własnej

Ogólnie dla macierzy 2×2

- Niespójna macierzy ocen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

- Rozwiązanie:

$$\lambda_{\text{max}} = \sqrt{\beta\gamma}, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta - \sqrt{\beta\gamma}}{\beta - \gamma} \\ \frac{\sqrt{\beta\gamma} - \gamma}{\beta - \gamma} \end{pmatrix} \quad \text{(po normalizacji).} \tag{13}$$

- Poprawiona, spójna macierz ocen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{p(1)}{p(1)} & \frac{p(1)}{p(2)} \\ \frac{p(2)}{p(1)} & \frac{p(2)}{p(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \\ \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Uwaga: ocena $a(1,2)$ powstała jako średnia geometryczna ocen: β i $\frac{1}{\gamma}$.

Metoda maksymalnej wartości własnej

Drugi sposób obliczania

1. Wykonać $A := A^2$. Np. dla $n = 3$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(1,1)^2 + a(1,2)a(2,1) + a(1,3)a(3,1) & a(1,1)a(1,2) + a(1,2)a(2,2) + a(1,3)a(3,2) & a(1,1)a(1,3) + a(1,2)a(2,3) + a(1,3)a(3,3) \\ a(2,1)a(1,1) + a(2,2)a(2,1) + a(2,3)a(3,1) & a(2,1)a(1,1) + a(2,2)a(2,1) + a(2,3)a(3,1) & a(2,1)a(1,3) + a(2,2)a(2,3) + a(2,3)a(3,3) \\ a(3,1)a(1,1) + a(3,2)a(2,1) + a(3,3)a(3,1) & a(3,1)a(1,2) + a(3,2)a(2,2) + a(3,3)a(3,2) & a(3,1)a(1,3) + a(3,2)a(2,3) + a(3,3)^2 \end{pmatrix}.$$

2. Wyznaczyć wektor priorytetów poprzez zsumowanie otrzymanej macierzy wierszami i normalizację.
3. Jeżeli nowy wektor priorytetów różni się od poprzedniego (co do wszystkich wartości) o nie więcej niż ϵ, to przerwać procedurę. W przeciwnym razie kontynuować od kroku 1.

Krytyka metody maks. wartości własnej

- Indeks zgodności (ang. *consistency index*):

$$\frac{\lambda_{\mathrm{max}} - n}{n - 1}. \tag{15}$$

  Saaty stwierdza, że jeżeli jest to liczba mniejsza niż 10%, to można być zadowolonym z ocen ekspertów.

- Murphy (1993) podaje przykłady macierzy, które nigdy nie osiągną zadowalającego indeksu spójności, przy skali ocen Saaty'ego: $\{\frac{1}{9}, \cdots, 9\}$.
- Transponowanie macierzy ocen (i zastosowanie metody) może prowadzić do innego porządku priorytetów (Barzilai i in., 1987).
- Dodanie nowego czynnika (elementu hierarchii) może prowadzić do utraty poprzedniego porządku priorytetów (ang. *rank reversal*).

Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów

Polega na znalezieniu takiej macierzy ilorazowej $\{p(i)/p(j)\}$, która będzie najbliższa do niespójnej macierzy A w sensie minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\ln a(i,j) - \ln \frac{p(i)}{p(j)} \right)^2 . \tag{16}$$

Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\ln a(i,j) - \ln \frac{p(i)}{p(j)} \right)^2.$$

Podstawienia: $\ln a(i,j) = b_{ij}$, $\ln p(i) = c_i$. Minimalizujemy ze względu na c_i sumę:

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(b_{ij} - c_i + c_j \right)^2.$$

$$\forall\ k = 1, \ldots, n \qquad \frac{\partial(\cdot)}{\partial c_k} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial c_k} &= 2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(b_{ij} - c_i + c_j \right) \left([k = i] \cdot (-1) + [k = j] \cdot 1 \right) \qquad \text{[$\cdot$] jest f. wskaźnikową} \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(-b_{kj} + c_k - c_j \right) + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(b_{ik} - c_i + c_k \right) \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(b_{ik} - b_{ki} \right) + 4nc_k - 4 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i. \end{aligned}$$

Wygodne jest teraz przyjęcie $\sum_i c_i = 0$, co odpowiada $\ln \prod_i p(i) = 0$, czyli $\prod_i p(i) = 1$.

Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów

$$2\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(b_{ik}-b_{ki})+4nc_k=0,$$

$$c_k=-\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(b_{ik}-b_{ki}),$$

$$\ln p(k)=-\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\big(\ln a(i,k)-\ln a(k,i)\big),$$

$$p(k)=\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a(k,i)}{a(i,k)}\right)^{\frac{1}{2n}}. \tag{17}$$

W literaturze można spotkać (błędne wg mnie) rozwiązanie: $p(k)=\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}a(k,i)\right)^{\frac{1}{n}}$ *— daje gorsze wyniki optymalizowanego kryterium.*

Rank reversal — problem zmiany rankingu decyzji

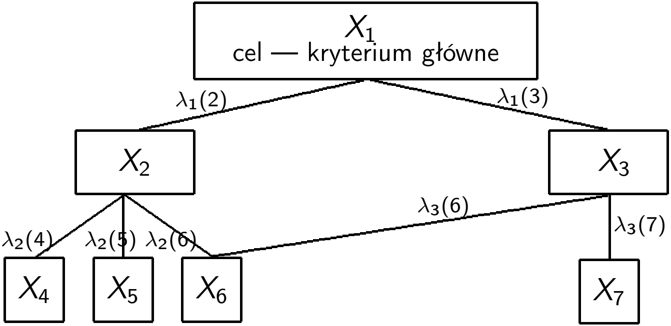
Problem

Czy dodanie do zbioru decyzji dodatkowej decyzji y_{m+1} powinno stwarzać możliwość zmiany pierwotnego rankingu policzonego dla $\{y_1, \ldots, y_m\}$ wg głównego kryterium?

Przykład: wybory 2000 r. w USA: (Gore, Bush), (Bush, Gore, Nadar).

Rank reversal — problem zmiany rankingu decyzji

- Belton i Gear (1983) pokazali, że w oryginalnym AHP ranking decyzji może być niestabilny. Dodanie nowej decyzji identycznej lub podobnej do jednej z poprzednich może zmienić pierwotny porządek.
- Rozwiązanie — multiplikatywne AHP (Barzilay, Golany):
  1. żadna normalizacja nie jest odporna na problem *rank reversal*,
  2. agregacja poprzez średnie geometryczne bezpośrednio na macierzach ocen (bez wektorów priorytetów),
  3. „zło" w oryginalnym AHP — macierz ocen w formie multiplikatywnej a do tego rachunki addytywne.
- W oprogramowaniu do AHP mówi się o dwóch trybach: *IDEAL* (nie dopuszcza zmiany rankingu), *DISTRIBUTIVE* (dopuszcza).



$$\begin{aligned} A^* &= \left(A_4^{\lambda_2(4)} \times A_5^{\lambda_2(5)} \times A_6^{\lambda_2(6)}\right)^{\lambda_1(2)} \quad \times \quad \left(A_6^{\lambda_3(6)} \times A_7^{\lambda_3(7)}\right)^{\lambda_1(3)} \\ &= A_4^{\lambda_2(4)\lambda_1(2)} \times A_5^{\lambda_2(5)\lambda_1(2)} \times A_6^{\lambda_2(6)\lambda_1(2)+\lambda_3(6)\lambda_1(3)} \times A_7^{\lambda_3(7)\lambda_1(3)}. \end{aligned}$$