Metody numeryczne

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

November 4, 2020

1 Pierwiastki wielomianów.

Twierdzenie (Darboux) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jeżeli $f(a) \cdot f(b) < 0$ (różne znaki na końcach przedziału), istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki że $f(c) = 0$.

Metoda połowienia

- Funkcja klasy C.
- W praktyce $c = a + \frac{b-a}{2}$ zamiast $c = \frac{a+b}{2}$

Twierdzenie (o dokładności metody połowienia) Jeżeli przedziały $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$ są tworzone metodą bisekcji, to granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ istnieją, są identyczne i równe zeru funkcji f. Jeśli $r := \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, gdzie $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, to:

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

Regula falsi

- W przedziale $[a, b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy.
- $f(x)$ klasy C^2 na przedziale $[a, b]$
- $f^{'}(x)$ i $f^{''}(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_s)-f(x_n)}(x_s - x_n)$, $(x_s = a \Rightarrow x_0 = b,\ x_s = b \Rightarrow x_0 = a)$

Metoda siecznych

- W przedziale $[a, b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy.
- $f(x)$ klasy C^2 na przedziale $[a, b]$
- $f^{'}(x)$ i $f^{''}(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)x_{n-1}-f(x_{n-1})x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

Metoda Newtona (stycznych)

- W przedziale $[a, b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy.
- $f(x)$ klasy C^2 na przedziale $[a, b]$
- $f^{'}(x) \neq 0$ na przedziale $[a, b]$
- $f^{''}(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$, $sign(f(x_0)) = sign(f''(x_0))$

Twierdzenie (Zasadnicze Twierdzenie Algebry, dla wielomianów rzeczywistych) Każdy wielomian $f(x)$ stopnia $n > 0$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (z uwzględnieniem krotności). Innymi słowy - jeżeli $deg(f) = n$, to $f(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k}$, gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, a wielomian ma k różnych pierwiastków.

Definicja **Ciągiem Sturma** nazywamy ciąg wielomianów rzeczywistych, tworzony przy użyciu algorytmu Euklidesa:

- $f_0(x) = f(x)$
- $f_1(x) = f'(x)$
- $f_2(x) \equiv -f_0(x) \pmod{f_1(x)}$
- $f_3(x) \equiv -f_1(x) \pmod{f_2(x)}$
- ...
- $f_p(x) \equiv -f_{p-2}(x) \pmod{f_{p-1}(x)}$
- $f_{p+1}(x) \equiv 0 \pmod{f_p(x)}$

Twierdzenie (Sturma) Jeżeli ciąg $(f_i(x))$ jest ciągiem Sturma na przedziale $[a, b]$ i $f_0(a)f_0(b) \neq 0$, to liczba różnych zer rzeczywistych wielomianu $f_0(x)$ jest w tym przedziale równa $N(a) - N(b)$.

Twierdzenie (Fouriera) Jeżeli $f(x)$ jest wielomianem stopnia n określonym w przedziale (a, b) i $f_0(a)f_0(b) \neq 0$, to liczba zer wielomianu $f(x)$ w tym przedziale jest równa $M(a) - M(b)$ lub jest od tej liczby mniejsza o liczbę parzystą. ($M(x_0)$ oznacza liczbę zmian w ciągu $(f^{(k)}(x)), k = 0, 1, \ldots, n$).

References

[1] D. Kincaid, *Analiza numeryczna*. WNT, 2005.

[2] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*. WNT, 2001.