1. a) Rozwijamy nieskończenie wiele razy różniczkowalną funkcję e^x w szereg Taylora wokół punktu $c = 0$.

$$e^x = \frac{e^c}{0!} \cdot (x-c)^0 + \frac{e^c}{1!} \cdot (x-c)^1 + \frac{e^c}{2!} \cdot (x-c)^2 + \frac{e^c}{3!} \cdot (x-c)^3 + \dots \tag{1}$$

(zawsze mamy e^c ponieważ pochodna dowolnego rzędu naturalnego funkcji e^x wynosi e^x).
Po podstawieniu $c = 0$ oraz $x = 1$ otrzymujemy:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \tag{2}$$

Jeżemy chcemy wziąć skończoną liczbę n składników, musimy oszacować resztę:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \tag{3}$$

W naszym przypadku będzie ona miała postać:

$$E_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}1^{n+1} \tag{4}$$

Ustalmy $n = 3$ (bierzemy składniki z indeksami 0, 1, 2 oraz 3), czyli reszta będzie postaci:

$$E_3(x) = \frac{e^\xi}{4!} \tag{5}$$

(e^ξ to czwarta pochodna funkcji e^x w punkcie ξ.)
Ponieważ (zgodnie z tw. Taylora) $\xi \in (c, x) = (0, 1)$ możemy oszacować z góry moduł reszty ($|e^\xi| < 3$):

$$\left|\frac{e^\xi}{24}\right| < \frac{3}{24} \tag{6}$$

Czyli odrzucając resztę popełniamy błąd mniejszy niż 0,125.
Przykłady b i c analogicznie.

---

3. a) Szacujemy resztę:

$$\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\right| < \frac{3}{(n+1)!} \tag{7}$$

i oczekujemy że będzie nie większa niż $\frac{1}{1000}$. Podstawiamy $k = n + 1$ dla uproszczenia obliczeń.

$$\frac{3}{k!} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{k!}{3} \geq 1000 \Rightarrow k! \geq 3000 \Rightarrow k! \geq 7 \tag{8}$$

Czyli reszta musi być stopnia co najmniej 7. $\Rightarrow$ Potrzebujemy 7 składników (z indeksami od 0 do 6).

---

3. b) Korzystamy z wzoru Taylora dla funkcji e^x, gdzie $x = 2$:

$$e^2 = \frac{1}{1!} \cdot (2)^0 + \frac{1}{1!} \cdot (2)^1 + \frac{1}{2!} \cdot (2)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (2)^3 + \dots \tag{9}$$

Po wybraniu n początkowych składników reszta wynosi dla $\xi \in (0, 2)$:

$$\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot 2^{(n+1)}\right| < \frac{8}{(n+1)!} \cdot 2^{(n+1)} \tag{10}$$

Oczekujemy, że reszta będzie mniejsza lub równa $\frac{1}{1000}$ (podstawiamy $k = n + 1$):

$$\frac{8}{k!} \cdot 2^k \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{k!}{8 \cdot 2^k} \geq 1000 \Rightarrow \frac{k!}{2^k} \geq 8000 \tag{11}$$

Czyli $k \geq 11 \Rightarrow$ potrzebujemy 11 pierwszych wyrazów.

---

4. Niech $x \in \mathbb{R}$, wtedy $\xi \in \mathbb{R}$. Mamy:

$$1 + x \overset{?}{\leq} e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{e^\xi}{2!}x^2 \tag{12}$$

(resztą R_1 jest $\frac{e^\xi}{2!}x^2$).
Ponieważ $x^2 \geq 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x, a funkcja $e^x > 0$, nierówność jest prawdziwa.

---

7. Rozważmy znormalizowaną do przedziału $[0, 1]$ liczbę rzeczywistą x:

$$x = a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots a_{-n} + \cdot 10^{-n}| + a_{-(n+1)} \cdot 10^{-(n+1)} + \dots \tag{13}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Zaokrąglamy w górę ($a_{-(n+1)} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$). Wtedy $\tilde{x} = x + r$, gdzie $r \leq 5 \cdot 10^{-(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$. Mamy $r = \tilde{x} - x$.

2. Zaokrąglamy w dół ($a_{-(n+1)} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Wtedy $x = \tilde{x} + r$, gdzie $r \leq 4 \cdot 10^{-(n+1)} < 5 \cdot 10^{-(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$. Mamy $r = x - \tilde{x} = -(\tilde{x} - x)$.

Ostatecznie mamy:

$$|r| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n} \tag{14}$$